ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ ВЫПУСК 40,45

С. В. ФОМИН

СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

(издание второе, дополнение)

И. М. Яглом

НЕОБЫКНОВЕННАЯ АЛГЕБРА

С. В. Фомины «Тооллын систем» И. М. Яглом „Ер бусын алгебр“ хэмээх ЗХУ-д „Популярные лекции по математике“ цувралаар гарсан хоёр лекц оруулав.

„Тооллын системд“ аравтын, хоёртын ба бусад тооллын янз бүрийн системийн чанар, хэрэглэгээ болон тэдгээрийн үүссэн түүхийн тухай өгүүлнэ. Тооллын хоёртын системтэй холбогдуулж тооцон бодох машины тухай анхны мэдэгдхүүн олгоно.

«Ер бусын алгебрт» математик логик ба электрон тооцооны машин кибернетиктэй холбогдсон орчин үеийн математикийн бүх чиглэлүүдэд чухал үүрэгтэй „Булийн алгебр“ хэмээх сургаалд холбогдох үндсэн ойлголтуудыг өгүүлнэ.

Энэ номыг уншиж ойлгоход уншигчдаас бүрэн бус дунд сургуулийн хүрээнээс гарахгүй математикийн тийм мэдлэг л шаардана.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА“
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО—МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

Нэгдүгээр хэсэг

ТООЛЛЫН СИСТЕМ

Өмнөх үг

Тооны хэл, жирийн хэлний адилаар өөрийн цагаан толгойн үсгүүдтэй юм. Одоо бараг дэлхий даяар ашиглаж байгаа тооны хэлний цагаан толгойн үсгүүд нь 0-гоос 9 хүртэлх арван цифр (тэмдэг) юм. Энэ хэлийг тооллын аравтын систем гэж нэрлэдэг.

Газар бүрийн хүмүүс цаг ямагт л тооллын аравтын систем ашиглаж байсан уу гэвэл үгүй юмаа.

Цэвэр математикийн талаас нь авч үзвэл аравтын тооллын системийг бусад, боломжит тооллын системүүдээс ялгах онцгой давуу тал байхгүй юм. Энэ системийн газар сайгүй тархсан нь математикийн ерөнхий хуулинд байгаа биш, огт өөр шалтгаантай юм.

Орчин үеийн тооцон бодох машин „эрхэмлэн ашигладаг хоёртын ба (заримдаа) гуравт системүүд нь сүүлийн үед аравтын системийн зүй ёсны өрсөлдөгч нь болсон юм.

Янз бүрийн тооллын системийн чанар, үүссэн түүх болон тэдгээрийг хэрэглэх талаар энэ өчүүхэн номонд өгүүлжээ. Номыг уншихад дунд сургуулийн программын хүрээнээс гарсан математикийн мэдлэг шаардахгүйг тэмдэглэе.

1 §. Бүтэн аравт ба бүтэн биш аравтын тоонуудын тухай

„Байшингаас 49 эргэм насны хүн гарч гудамжаар 196 метр яваад дэлгүүрт орж тэндээс хоёр долоон өндөг худалдан авч цааш явав“ гэсэн өгүүлбэрийг авч үзье,

Ингэж ярих нь гайхалтай санагдах биз дээ? Хүний нас, зай гэх мэтийн ямар нэгэн хэмжигдхүүнийг бид ойролцоогоор үнэлэхдээ дандаа „200 метр“ „50 эргэм насны хүн“ гэх мэтээр ихэвчлэн бүтэн аравтын тоонуудыг ашиглаж ярьдаг юм. Бүтэн биш аравтын тоонуудыг бодвол бүтэн аравтын тоонууд дээр арифметикийн үйлдэл хийхэд тохиромжтой ба мөн тэдгээрийг тогтооход хялбар байдаг. Жишээ нь 100 ба 200 тоог цээжээр хэн ч амархан үржих атал 147 ба 343 гэсэн гурван оронтой хоёр бүтэн биш аравтын тоог бичихгүй бол тэр болгон хүн түргэн үржиж чадахгүй.

Тоонуудыг бүтэн аравт ба бүтэн биш аравт гэж ангилах нь зөвхөн ярианы хэлний хүрээнд хийсэн тохиролцоо юм. Үнэндээ тооллын ямар систем ашигласнаас хамаарч тухайн тоо бүтэн аравт эсвэл бүтэн биш аравтын тоо болж болох юм.

Гэлээ ч гэсэн бүтэн аравт ба бүтэн биш аравтын тооны тухай ярихад бид үүнийг огт бодолгүй ярьж заншжээ. Үүний учрыг олохын тулд юуны өмнө бид бүхний өдөр тутам ашигладаг ердийн аравтын тооллын систем нь юу болохыг авч үзье. Энэ системд аливаа эерэг бүхэл тоо нь нэгжүүд, аравтууд, зуутууд гэх мэт нэгжүүдийн нийлбэр байдалтай тавигддаг. Өөрөөр хэлбэл коэффициентүүд нь 0-ээс 9 хүр-

тэл утга авдаг 10-ын янз бүрийн зэргүүдийн нийлбэр хэлбэртэй тавигдана. Жишээ нь:

$$2548$$

гэсэн бичлэг нь авч үзэж байгаа тоо нь 8 нэгж, 4 аравт, 5 зуут, 2 мянгат агуулахыг заана. Өөрөөр хэлбэл 2548 тоо

$$2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 8\cdot 10^0$$

илэрхийллийн хураангуй тэмдэглэл нь юм.

Ямар ч тоог 10-аас өөр ямар нэгэн бүхэл тооны (1-ээс бусад) тухайлбал 7-гийн зэргүүдийн эвлүүлэг хэлбэртэйгээр дээрхийн адил бичиж болно.

Тооллын долоотын систем" буюу „7 суурьтай тооллын систем" гэж нэрлэгдэх энэ системд бид 0-оос 6 хүртэл ердийн маягаар тоолох ба харин 7-ын тоог дараачийн орны нэгж болгож болно. Түүнийг бид шинэ долоотын системд

$$10$$

гэсэн тэмдгээр тэмдэглэх нь зүйтэй (хоёрдугаар орны нэгж) Энэ тэмдэглэгээг аравтын системийн тоо 10-тай андуурахгүйн тулд түүнд 7 гэсэн тэмдгийг хавсаргая.

Өөрөөр хэлбэл 7-гийн оронд

$$(10)_7$$

гэж бичиж байя!

Дараачийн орнуудын нэгжүүд нь 7^2, 7^3 гэх мэтийн тоонууд байх ёстой ба тэдгээрийг

$$(100)_7, \ (1000)_7$$

гэх мэтээр тэмдэглэх нь зүйтэй. Ямар ч бүхэл тоог 7-ийн зэргүүдээс эвлүүлж болно. Өөрөөр хэлбэл

$$a_k\cdot 7^k + a_{k-1}\cdot 7^{k-1} + \ldots + a_1\cdot 7 + a_0$$

хэлбэрт тавьж болох ба үүнд $a_0, a_1 \ldots, a_k$ коэффициентүүд нь 0-оос 6 хүртэлх аливаа утгыг авч болно. Тоог 7 суурьтай системд бичсэн бичлэгт арав-

тын системийн адилаар энэ суурийн зэргүүдийг орхиж, бидний ашиглаж байгаа тооллын системийн суурь нь чухамхүү тоо 7 мөн гэдгийг $_7$ тэмдгээр сануулан

$$(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_7$$

хэлбэртэй бичиж болно.

Жишээ авч үзье. Аравтын тоо 2548-ийг

$$1\cdot 7^4 + 0\cdot 7^3 + 3\cdot 7^2 + 0\cdot 7 + 0$$

хэлбэрт оруулж болох ба бидний дээрх тэмдэглэлгээ ёсоор

$$(10300)_7$$

хэлбэртэй бичиж болно.

Иймд

$$(2548)_{10} = (10300)_7$$

Бичлэгийн энэ „долоотын системд аравтын системийн бүтэн аравт байсан тоонууд бүтэн долоот байх нь албагүйг сануулъя.

Жишээ нь:

$$(147)_{10} = (300)_7$$
$$(343)_{10} = (1000)_7$$

Учир нь

$$147 = 3\cdot 7^2 \text{ ба } 343 = 7^3 \text{ гэтэл}$$
$$(100)_{10} = (202)_7$$
$$(500)_{10} = (1313)_7$$

гэх мэт. Иймучраас, долоотын системд $(147)_{10}$-г $(343)_{10}$-аар үржих нь $(100)_{10}$-г $(500)_{10}$-аар үржсэнээс хялбар байна. Хэрэв бид долоотын системийг ашигласан бол 49 насыг (50 нас биш) бүтэн наст"-д тооцож ой тэмдэглэж зайг барагцаагаар хэмжиж „98 м" эсвэл „196 м" гэж ярьж, ($(98)_{10} = (200)_7$ ба $(196)_{10} = (400)_7$ нь 7-тын системд бүтэн аравтын тоонууд болно) юмыг арав арваар биш долоо долоогоор тоолох байсан юм.

Товчоор хэлбэл, хэрвээ долоотын систем бүх нийтэд тархсан байсан бол эхэнд дурьдсан өгүүлбэрт хэн ч гайхахгүй байхсан билээ.

Гэвч үнэн хэрэг дээрээ долоотын систем нь түгээмэл тархаагүй ба хаягүй тархсан аравтын системтэй өрсөлдөж чаддаггүй юм. Үүний шалтгаан нь юунд орших вэ?

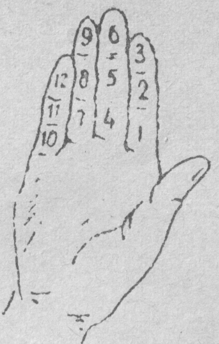
2 §. Тооллын аравтын системийн үүсэл

Яагаад чухамхүү 10-ын тоо тийм онцгой үүрэгтэй байна вэ? Эдгээр асуудлаас хол хүн бол эрэгцүүлж бодолгүйгээр тоо 10 нь бүтэн аравт юм. Ямар ч тоог түүгээр үржихэд хялбар мөн аравтууд, зуутуудаар тоолох нь хялбар эвтэй юм гэсэн хариултыг өгч магадгүй. Гэвч хэргийн учир яг үүний урвуу бологых бид тайлбарласан билээ. 10-ыг тооллын системийн суурь болгож авсан учраас тэр нь бүтэн аравт байгаа юм. тооллын ямар нэгэн системд тухайлбал долоотын системд шилжихэд (энэ системд 10 тоо (13)₇ байдалтай бичигдэнэ) түүний бүтэн аравт болох чанар нь даруй үгүй болно.

Чухам аравтын систем нийтэд түгсэн шалтгаан нь математикт огт хамаагүй өөр шинж чанартай юм. Эрт дээр үеэс эхлэн хүмүүсийн тоололд ашигласан анхны хэрэгсэл болох гарын арван хуруу л үүний шалтгаан болно. Нэгээс арав хүртэл хуруугаар тоолоход тохиромжтой байдаг. Бидэнд байгалиас заяасан «тооцооны хэрэгслийн» бүх боломжоог шавхаж 10 хүртэл тоолоод энэ 10 гэсэн тоог шинэ томоохон нэгж болгож авах нь зохимжтой юм. (Дараачийн оронгийн нэгж). Арван аравтыг гуравдугаар орны нэгж болгон авах гэх мэтээр. Ийм учраас чухам хуруугаар тоолох нь одоо бидэнд яагаад ч юм, чухам тийм байх ёстой мэт санагдах болсон, аравтын системийн эхлэлийг тавьсан байна.

3 §. Тооллын бусад систем ба тэдгээрийн үүсэл

Тооллын аравтын систем нь одоогийн ноёлох байр сууриа тийм ч амархан эзлээгүй байна. Түүхэн өөр өөр үед олон ард түмэн аравтынхаас ялгаатай тооллын системийг ашиглаж байсан байна.


1 дүгээр зураг.

Жишээлбэл арван хоёртын тооллын систем нь нэлээд өргөн тархмал байжээ. Үүний гарал нь мөн л хуруугаар тоолохтой холбоотой нь эргэлзээгүй. Тодруулбал эрхий хуруунаас бусад гарын дөрвөн хуруу нь нийтдээ 12 үетэй (1 дүгээр зураг) тул эрхий хуруугаараа тэдгээрийг дэс дараалан 1-ээс 12 хүртэл тоолж болно.

Дараа нь 12-ийг дараачийн орны нэгж болгож авна. Арван хоёртын системийн ул мөр эдүгээ хүртэл аман ярианд хадгалагдаж үлджээ. Жишээ нь бид „арван хоёр„ гэхийн оронд „дюжин“[1] гэж орос хэлэнд ихэвчлэн ярьдаг юм. Хутга, сэрээ, таваг гэх мэтийн олон зүйлийг бид аравтаар биш ихэвчлэн 12-аар (дюжинаар) тоолдог. (хоолны бүрэн иж хэрэгсэл голдуу 12 эсвэл 6 хүнд хааяа 10 ба 5 хүнд зориулагдсан байдгийг санацгаа). „Дюжины дюжинийг“ заасан „гросс“ гэдэг үг одоо маш ховор тохиолдох болжээ (Өөрөөр хэлбэл арван хоёртын систем дэхь гуравдугаар орны нэгж). Бас нэлээд хэдэн арван жилийн өмнө энэ үг ялангуяа худалдаанд үлэмж их тархсан байв. „Арван хоёр гроссыг“ „масс“ гэж нэрлэдэг байсан ба одоо үүнийг мэдэх хүн ховор болжээ.

Англичуудын хэмжүүрийн системд (1 *фут* = 12 *дюйм* ба мөнгөний системд 1 *шиллинг* = 12 *пенс* байдаг нь) тооллын арван хоёртын системийн ул мөр болох нь эргэлзээгүй.

Математикийн үүднээс авч үзвэл арван хоёртын систем нь аравтын системийг бодвол ямар нэг талаараа давуу юм.

Учир нь 12-ын тоо 2, 3, 4, 6-д хуваагдах ба 10 нь зөвхөн 2 ба 5-д хуваагдана. Тооллын системийн суурь нь олон хуваагчтай бол түүнийг ашиглахад тохиромжтой байдаг. Хуваагдах шинжтэй холбогдуулж 7 §-д бид энэ асуудлыг эргэж авч үзнэ.

[1] Дюжин—12 юмнаас тогтсон зүйлийг голдуу ярьдаг ба багц 12 гэж орчуулдаг. (редакторын тайлбар)

Өндөр соёлтой, тухайлбал математикийн соёл нэлээд өндөр байсан, эртний Вавилонд нэлээд нарийн, жартын[1] систем байсан. Тэр систем чухам яаж үүссэнийг тайлбарлахад түүхчдийн санал зөрж байна. Нэг нь зургаатын нөгөө нь аравтын системийг ашигладаг хоёр омог нэгдэж нэг омог үүссэн гэсэн яг үнэн болох нь лавтай биш нэг ийм таамаглал байдаг. Энэ хоёр омог ашиглах системийнхээ талаар харилцан буулт хийж тохиролцсоноос жартын систем үүссэн гэж үздэг. Вавилончууд жилд 360 хоногтой гэж тоолдог байсантай холбогдож 60-тын систем үүссэн гэдэг бас нэг таамаглал байдаг. Гэвч энэ таамаглалыг бодитой үндэслэгдсэн гэж үзэж бас л болохгүй юм. Учир нь: Эртний Вавилончуудын одон орны мэдлэг нэлээд сайн байсан болохоор жилийн уртыг тодорхойлохдоо тэдний гаргасан алдаа нь 5 хоногоос нэлээд бага байсан гэж бодох ёстой. Жартын системийг үүсэл нь тодорхой бус хэвээр байгаа ч гэсэн түүнийг Вавилон улст хэрэглэж байсан ба өргөн тархсан гэдгийг гүйцэд сайн тогтоосон юм. Арван хоёртын системийн адил энэ систем нь ямар нэгэн хэмжээгээр одоо ч гэсэн хадгалагдан үлджээ. (Жишээ нь цагийг 60 минутад, минутыг 60 секунтэнд, өнцгийг хэмжих системд мөн үүнтэй адилаар градус = 60 *минут*, 1 *минут*=60 *секунд* байдаг.) Жаран өөр „цифр"-ийг хэрэглэх энэ систем нь нийтдээ нэлээд нүсэр, аравтын системийг бодвол тохиромж багатай юм.

Африкийн нэрт шинжээч Стенлийн мэдүүлгээр бол африкийн зарим омогт тавтын систем тархсан байна. Энэ систем анхны «тооцооны машин" болох хүний гарын зохион байгуулалттай холбоотой нь илэрхий юм.

Олон зуун жилийн турш америк тивийн өргөн уудам нутагт оршин сууж тэнд өндөр соёлыг бүй болгосон бөгөөд дараа нь 16—17 зуунд испанийн булаан эзлэгчдэд бараг бүрэн устгагдсан ацтек, майя омгууд хорьтын системийг хэрэглэдэг байв. Манай тооллыг хүртэлх хоёр мянгаад оноос эхлэн Баруун Европод оршин сууж байсан кельтуудын омог мөн хорьтын системийг хэрэглэдэг байв. Кельтуудын хорьтын системийн зарим нэгж ул мөр нь орчин үеийн франц

---

[1]Манай оронд 60-тын систем хэрэглэж байжээ. 60 оронтой тооны нэр байсан ба он тооллыг 12, 60-аар тоолдог байжээ. (хэв. ред)

хэлэнд хадгалагдан үлджээ. Жишээ нь францаар „ная" ыг quote-vingt гэдэг ба энэ нь үгчилбээс „Дөрвөн хорь" гэсэн үг юм. Мөн францын мөнгөний системд 20 тааралддаг. Мөнгөний үлдсэн нэгж франк нь 20 су-д хуваагдана.

Хүн төрөлхтөний соёлын хөгжилд аравтын системийн хамт мэдэгдэхүйц үүргийг гүйцэтгэсэн тооллын дээр дурдсан дөрвөн системийн дотроос (арван хоёртын, тавтын, жартын, хорьтын) үүсэл нь тодорхойгүй байгаа **жарт**ын системээс бусад нь гарын эсвэл гар ба хөлийн **х**уруугаар тоолох аргатай холбоотой байна. Өөьөөр хэлбэл аравтын системийн адил „анатоми"-ийн үүсэлтэй **нь** эргэлзээгүй.

Дээр дурдсан жишээнүүдээс харвал (тэдгээрийн тоог нилээд олшруулж болох байв.) тооллын эдгээр системүүдийн **ол**он тооны ул мөр нь янз бүрийн хэл, мөнгөний систем, хэмжүүрийн системд бидний үеийг хүртэл хадгалагдан ирсэн нь харагдаж байна. Гэвч бид тоог бичих ба янз бүрийн тооцоог гүйцэтгэхэд аравтын системийг дандаа ашигладаг заншилтай болжээ.

4 §. Тооллын оронт ба оронгүй системүүд

Дээр бидний ярилцсан тооллын бүх системүүдийг нэг ерөнхий зарчмаар байгуулдаг. Тооллын системийн суурь гэж нэрлэгдэх ямар нэгэн p тоог сонгож аваад ямар ч N тоог, 0-гоос $p-1$ хүртэл утга авч болох коэффициентуудтайгаар p тооны зэргүүдийн эвлүүлэг байдалтай бичдэг. Өөрөөр хэлбэл

$$a_k p^k + a_{k-1}\cdot p^{k-1} + \ldots + a_1\cdot p + a_0$$

хэлбэртэй бичдэг. Энэ тоог хураангуйгаар

$$(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_p$$

хэлбэртэй бичдэг. Энэ бичлэгийн цифр бүрийн утга нь түүний байгаа байрнаас хамаарна. Жишээ нь 222 гэсэн тоонд 2 гурван удаа орсон байна. Тэдгээрийн хамгийн баруун нь хоёр нэгжийг, баруунаас хоёрдохь нь хоёр аравтыг (өөрөөр хэлбэл хорийг) гуравдахь нь хоёр зуутыг заана. (Бид энд аравтын системийг авч

үзэв). Хэрэв бид 222-ыг тухайлбал p суурьтай тооллын өөр системд бичсэн бол эдгээр хоёрууд харгалзан 2,2 p, 2 p^2 утгуудыг заах байсан. Ийм аргаар байгуулсан тооллын системийг *оронт тооллын систем* гэнэ.

Өөр зарчмаар байгуулсан оронгүй бусад тооллын систем байдаг. Тийм систем хэн бүхний мэдэх, жишээ нь римийн цифрүүд юм. Энэ системд I-нэгж, V-тав, X-арав, *L*-тавь, *C*-зуу гэх мэтийн үндсэн тэмдгүүд байх ба ямарч тоог эдгээр тэмдгүүдийн эвлүүлэг байдалтай бичнэ. Жишээ нь тоо 88 тоог энэ системд дараахь байдалтай бичнэ.

LXXXVIII

Энэ системд тэмдэг бүрийн утга нь өөрийн байгаа байрнаас хамаарахгүй. Тоо 88-ын дээрх бичлэгт *X* цифр нь гурван удаа орохдоо бүгд ижил хэмжигдхүүн арван нэгжийг л заана.

Римийн цифр нь одоо ч гэсэн байнга хэрэглэгддэг боловч (Жишээ нь цагны нүүрэн дээр) түүнийг математикийн практикт хэрэглэдэггүй. Их тоог харьцангуйгаар цөөн тооны цифрээр бичиж болдог тул оронт систем нь тохиромжтой байдаг. Оронт системд бичсэн тоонуудад арифметикийн үйлдлүүд гүйцэтгэхэд хялбар энгийн байдаг нь энэ системийн бусад системээс илүү давуу бас нэг чухал тал нь юм. (Энэ хэлснийг харьцуулахын тулд жишээ нь римийн цифрээр бичсэн хоёр гурван оронтой тоог үржихийг оролд).

Бид цаашдаа зөвхөн тооллын оронт системүүдийн тухай ярих болно.

5 §. Тооллын янз бүрийн систем дэх арифметик үйлдлүүд

Бид аравтын системд бичсэн тоонуудын хувьд „баганаар“ нэмэх ба үржих „өнцөглөн“ хуваах дүрмийг ашигладаг. Бусад ямарч оронт системд бичигдсэн тоонуудын хувьд эдгээр дүрмүүдийг бүрэн хэрэглэдэг.

Нэмэхийг авч үзье. Аравтын системийн адилаар өөр ямарч системд бид эхлээд нэгжүүдийг нэмж дараа нь дараагийн оронд шилжиж хамгийн их орон хүр-

тэл үргэлжлүүлдэг. Өмнөх орныг нэмэх үед нийлбэр энэ бичлэг бичигдсэн тооллын системийн суурьтай тэнцүү буюу суурьнас их байвал дараагийн оронд шилжүүлэх ёстой гэдгийг тухай бүр заавал санаж байх хэрэгтэй. Жишээ нь,

$$1)\ + \frac{\begin{array}{r}(23651)_8\\(17043)_8\end{array}}{(42714)_8} \qquad 2)\ + \frac{\begin{array}{r}(423)_6\\(1341)_6\\(521)_6\end{array}}{(3125)_6}$$

Одоо үржүүлэхэд шилжье. Тодорхой болгохын тулд ямар нэгэн тодорхой системийг тухайлбал зургаатын системийг сонгож авъя. Аливаа тоонуудыг өөр хоорондн нь үржүүлэхийн үндэс нь тооллын системийн суурьнас бага тоонуудын үржвэрийг тодорхойлсон үржүүлэхийн хүрд байдаг. Зургаатын системийн хувьд үржүүлэхийн хүрд дараахь байдалтай байдгийг хялбархан шалгаж болно.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Энэ хүрдийн нүд бүрд тэр нүдний оршиж байгаа мөр ба баганын дугааруудын үржвэр болох тоог зургаатын системд бичсэн болно (Энд таблицын нүсэр болгохоос зайлсхийж $_6$ тэмдгийг бид орхив).

Энэ хүрд ашиглаж хэдэн ч оронтой тоонуудыг „баганаар“ хялбархан үржиж болно.

Жишээ нь

$$\begin{array}{r} \times\ (353)_6 \\ (245)_6 \\ \hline (3124)_6 \\ (2332)_6 \\ (1144)_6 \\ \hline (145244)_6 \end{array}$$

Тооллын ямарч системд мөн өнцөглөн хувааж болно. Жишээ нь $(120101)_3$-ийг $(102)_3$-д хуваа гэсэн бодлогыг авч үзье.

Үүний бодолт нь:

$$\begin{array}{l|l} (120101)_3 & (102)_3 \\ \underline{(102)_3} & \overline{(1101)_3} \\ \ \ (111)_3 & \\ \ \ \underline{(102)_3} & \\ \ \ \ \ (201)_3 & \\ \ \ \ \ \underline{(102)_3} & \\ \ \ \ \ \ \ (22)_3 & \end{array}$$

хуваагдагч, хуваагч, ноогдвор үлдэгдлийг аравтын системд бичиж хариу зөв болохыг шалга).

Бодлого 1. Самбар дээр дараахь дутуу арчсан бичлэг үлдсэн бол нэмэгдхүүнүүд ба нийлбэр тооллын ямар системд бичигдсэнийг тодорхойл.

$$\begin{array}{r} 23\text{—}5\text{—} \\ +\ 1\text{—}642 \\ \hline 42\,42\,3 \end{array}$$

Хариу: Долоотын системд

Бодлого 2. Танай анги хэдэн сурагчидтай вэ? гэсэн бидний асуултад багш “Манай анги 100 сурагчидтай үүнээс 24 нь хөвгүүд 32 нь охидууд болно“ гэж хариулсан хариултанд бид эхлээд гайхсан боловч дараа нь багш зөвхөн аравтын бус систем ашигласныг ойлгов. Багш ямар системийг ашигласан бэ?

Энэ бодлогыг бодоход хэцүү биш. Ярьж буй тэр тооллын системийн суурь нь x байг. Тэгвэл багшийн хариулт нь түүний анги x^2 сурагчидтай ба тэднээс $2x+4$ хөвгүүд, $3x+2$ охид гэсэн үг болно.

Иймд

$$2x+4+3x+2=x^2$$

буюу

$$x^2-5x-6=0$$

Эндээс

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm7}{2}$$

өөрөөр хэлбэл $x_1=6$ $x_2=-1$ болно.

-1 нь тооллын системийн суурь байж болохгүй тул $x=6$ болно. Ингэхлээр багш хариугаа зургаатын системд хэлсэн байна. Үүнд түүний анги гучин зургаан сурагчидтай ба тэдгээрийн арван зургаа нь хөвгүүд, хорь нь охид байсан байх нээ.

6 §. Тоог нэг системээс өөр системд шилжүүлэх

Нэг системд тухайлбал аравтын системд бичигдсэн тоог өөр ямар нэгэн, жишээлбэл долоотын системд яаж шилжүүлэх вэ? Ямар нэгэн A тоог долоотын системд бичнэ гэдэг нь түүнийг

$$A=a_k\cdot 7^k+a_{k-1}7^{k-1}+\ldots+a_1\cdot 7+a_0$$

хэлбэртэй бичнэ гэсэн үг гэдгийг бид мэднэ. Иймучраас A тооны долоотын бичлэгийг олохын тулд аль нь ч 0-оос 6 хүртэлх цифрүүд байж болох $a_0, a_1, \ldots, a^k$ коэффициентуудыг олох хэрэгтэй. A тоог 7-д (бүхэл тоонуудад) хуваая. A тооны дээр бичигдсэн бичлэгт сүүлчийнхээс бусад бүх нэмэгдхүүнүүд нь 7-д бүхлээр хуваагдах тул үлдэгдэл нь a_0 гарах нь илэрхий. A тоог 7-д хуваахад ноогдсон ноогдворыг авч түүнийг бас 7-д хуваая. Ингэхэд гарсан шинэ үлдэгдэл нь a_1-тэй тэнцүү байна. Энэ үйлдлийг цааш нь үргэлжлүүлж A тооны долоотын бичиглэлд орох бүх a_0, $a_1 \ldots, a_k$ цифрүүд дээрхийн адилаар ноогдворуудыг

7-д дараалан хуваахад гарсан дараалсан үлдэгдлүүд болно.

Жишээ нь:

$$(3287)_{10}$$

тоог авч үзье. Түүнийг 7-д хуваахад ноогдвор нь 469 үлдэгдэл нь 4 байна.

Ингэхлээр 3287 тооны долоотын бичлэгийг сүүлчийн цифр нь 4 байна. Хоёрдугаар буюу аравтын орны цифрийг олохын тулд олсон ноогдвор 469-ийгээ бас 7-д хуваая. Ингэхэд ноогдвор нь 67 ба үлдэгдэл нь тэгтэй тэнцүү байна. Иймд 3287 тооны долоотын дүрслэлд хоёрдугаар цифр нь тэг байна. Цааш нь 67-г 7-д хуваахад ноогдвор 9, үлдэгдэл нь 4 байна. Энэ үлдэгдэл 4 нь 3287 тооны долоотын бичлэгийн гаравдахь буюу зуутын орны цифр болно. Эцэст нь сүүлчийн ноогдвор 9-ийг 7-д хувааж ноогдвор нь 1, үлдэгдэл нь 2 болохыг олно. Бидний хайж байгаа бичлэгийн дөрөв дэхь орны цифр нь энэ үлдэгдэл 2 болох ба ноогдвор 1 нь (Одоо бид түүнийг 7-д хувааж чадахгүй) сүүлчийн тав дахь орны цифр болно. Иймучраас

$$(3287)_{10}=(12404)_7$$

Энэ тэнцэтгэлийн баруун тал нь

$$1\cdot7^4+2\cdot7^3\mp4\cdot7^2+0\cdot7+4$$

илэрхийллийн хураангуй бичлэг болно.

Тоо 3287-ийн бичлэгээс түүний дүрслэлд шилжихэд хийсэн гаргалгааг дараахь байдалтай байрлуулахад тохиромжтой байдаг.

```
3287 |7
 4   469 |7
      0   67 |7
           4   9 |7
               2  1
```

Дээр дурдсан бүх зүйлүүд зөвхөн долоотын системээр барахгүй өөр ямар ч системд хэрэглэж болох нь ойлгомжтой. Ямар нэгэн A тооны p суурьтай сис-

тем дэх бичлэгийг олох ерөнхий дүрмийг дараахь маягаар томьёолж болно:

A тоог p-д бүхлээр хуваахад гарах үлдэгдэл нь A тооны p-тын бичлэгийн нэгжийн орны буюу сүүлчийн цифр болно. Анх хуваахад ноогдсон ноогдворыг дахин p-д хувааж хоёрдугаар үлдэгдлийг авбал энэ нь хоёрдугаар орны цифр болно гэх мэтчилэн тооллын системийн суурь p-ээс бага ноогдвор гартал нь энэ үйлдлийг үргэлжлүүлэх ба эцсийн ноогдвор нь ахмад орны цифр болно.

Бас нэг жишээ авч үзье. 100-г хоёртын системд бичиж үзүүлье:

```
100 |2
 0   50 |2
     0   25 |2
          1  12 |2
              0   6 |2
                  0  3 |2
                     1  1
```

Иймд $(100)_{10}=(1100100)_2$

Тооцон бодох машин ажиллах үед тоог аравтын системийн нэгжээс хоёртын системд шилжүүлэх хэрэг байнга тааралдах юм. Тооцон бодох машины талаар хойно өгүүлнэ.

Бидний авч үзсэн жишээнүүдэд анхны тооллын систем нь аравтых байв. Мөн тийм аргаар тоог ямар ч системээс өөр аль ч системд шилжүүлж болно. Үүний тулд дээр авч үзсэн жишээнүүд, дээрхтэй адил мөн тийм дараалан хуваах үйлдлийг хийх ба гэхдээ эдгээр үйлдлүүдийг аравтын системд биш тооны анхны бичлэг бичигдсэн тэр системд хийх хэрэгтэй болно.

Бодлого. Бидэнд хоёр тавагтай жигнүүр ба 1 грамм, 3 грамм, 9 грамм 27 грамм гэх мэт (жин тус бүрээс нэг ширхэг) туухайнууд байгаа бол эдгээрээр ямарч ачааг нэг граммын нарийвчлалтай хэмжиж чадах уу?

Энэ бодлогын хариу нь наашатай байна. Гуравтын системд тоо бичихэд тулгуурласан бодолтыг сийрүүлье. Бидний жигнэх ёстой биеийн жин нь A грамм байг (A тоог бид бүхэл гэж авч үзнэ). Энэ A тоог тооллын гуравтын системд

$$A=(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_3$$

гэж бичиж болно.

Өөрөөр хэлбэл $A=a_n \cdot 3^n+a_{n-1} \cdot 3^{n-1}+ \ldots + a_1 \cdot 3+a_0$ үүнд a_0, $a_1 \ldots a_n$ коэффициентууд нь 0, 1, 2 утгуудыг авч болно. Ямар ч тоог бичлэгт нь 0; 1; −1 цифрүүд (0, 1, 2-ын оронд) орсон байхаар дээрхээс бага зэрэг ялгаатайгаар гуравтын системд бичиж болно. Тийм бичлэгийг дараахь маягаар гаргая. A тоог дээр дурдсан дараалан хуваах аргаар аравтын системээс гуравтын системд шилжүүлэх ба гэхдээ үлдэгдэл нь 2 гарах тухай бүр бид ноогдворыг нэгээр ихэсгэж үлдэгдлийг нь −1 гэж бичнэ. Үүний дүнд A тооны бичлэг нь дараахь нийлбэр хэлбэртэй болно.

$$A=b_m \cdot 3^m+b_{m-1} \cdot 3^{m-1}+ \ldots +b_1 \cdot 3+b_0$$

Үүнд b_m, b_{m-1} ..., b^0 коэффициент бүр нь 0,1−1 утгуудыг авч болно.

Жишээ нь 100 тоог ердийн аргаар гуравтын системд 10201 гэж бичих ба хоёрдугаар аргаар бичвэл $100=3^4+3^3-3^2+1$ учраас 11−101 хэлбэртэй байх болно.

A грамм ачааг жигнүүрийн нэгдүгээр таваг дээр тавьж хэрэв $b_0=1$ бол 1 грамм туухайг хоёрдугаар таваг дээр, $b_0=-1$ бол, нэгдүгээр таваг дээр тавья. (Хэрэв $b_0=0$ бол бид нэгдүгээр туухайг ажиглахгүй). Цааш нь 3 граммын туухайг хэрэв $b_1=1$ бол хоёрдугаар таваг дээр хэрэв $b_1=-1$ бол нэгдүгээр тавган дээр тавих гэх мэтчилэн тэнцүүлье. Ийм аргаар туухайнуудыг хуваарилахад бид A ачааг жигнэж чадна гэдгийг ойлгоход төвөггүй. Хэрэв ачааны жин нь үл мэдэгдэх байсан бол одоо ачаа тэнцэж байхаар туухайнуудыг жигнүүрүүд дээр бид байрлуулсны дүнд ачааны хэмжээг тодорхойлно.

Үүнийг жишээгээр тайлбарлая.

Бидэнд 200 грамм ачаа байна гэж авч үзье. 200-г ердийн аргаар гуравтын системд шилжүүлье.

```
200 | 3
 2    66 | 3
      0    22 | 3
           1    7 | 3
                1   2
```


Иймд $(200)_{10}=(21102)_3$ буюу дэлгэрэнгүй бичвэл

$$200=2 \cdot 3^4+1 \cdot 3^3+1 \cdot 3^2+0 \cdot 3+2 \text{ болно.}$$

Хэрэв 200-г гуравтын бичлэгт дээр дурдсан хоёрдугаар аргаар 2-ыг ашиглахгүйгээр −1-ийг ашиглан шилжүүлбэл

```
200 | 3
−1    67 | 3
      1    22 | 3
           1    7 | 3
                1   2 | 3
                   −1   1
```

болох ба өөрөөр бичвэл

$$200=1 \cdot 3^5-1 \cdot 3^4+1 \cdot 3^4+1 \cdot 3^2-1 \text{ болно:}$$

$200 = 1 \cdot 3^5 - 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 - 1$

Шууд бодох замаар сүүлчийн тэнцэтгэлийг хялбархан шалгаж болно.

Ийм учраас жигнүүр дээр тавьсан 200 грамм ачааг тэнцүүлэхийн тулд мөн тэр тавган дээр 1 ба 81 граммын туухай тавих ба нөгөө таваг дээр 3,9, 27, 243 граммуудын туухайнуудыг тавих хэрэгтэй юм.

7 §. Хуваагдах шинжийн тухай

Ямар нэгэн тоо нь 3, 5, 9 гэх мэт тоонуудад хуваагдах эсэхийг тодорхойлох хялбар шинжүүд байдаг. Эдгээр шинжүүдийг сануулъя.

1. *Тооны 3-д хуваагдах шинж.* Хэрэв тооны цифрүүдийнх нь нийлбэр 3-д хуваагдаж байвал тэрхүү тоо 3-д хуваагдана. Жишээ нь: тоо 257802 (цифрүүдийнх нь нийлбэр $2+5+7+8+0+2=24$) 3-д хуваагдах ба тоо 125831 цифрүүдийнх нь нийлбэр $1+2+5+8+3+1=20$ 3-д хуваагдахгүй.

2. *Тоо 5-д хуваагдах шинж.* Сүүлчийнх нэгжийн орны цифр нь 5 эсвэл 0 байвал тэр тоо 5-д хуваагдана.

(Өөрөөр хэлбэл тооны сүүлчийн орны нэгж 5-д хуваагдаж байвал)

3. *2-д хуваагдах тооны шинж нь* өмнөхтэй адил Сүүлчийн нэгжийн орны тоо нь 2-д хуваагдвал уг тоо 2-т хуваагдана.

4. *9-д хуваагдах тооны шинж* нь 3-д хуваагдах шинжтэй адил. Цифрүүдийнх нь нийлбэр 9-д хуваагдах тоо 9-д хуваагдана.

Эдгээр шинжүүдийн баталгаа нь хялбар болно. Жишээ нь: 3-д хуваагдах шинжийг авч үзье. Аравтын системийн орон бүрийн нэгжийг 3-д хуваахад үлдэгдэл нь 1 гардаг гэдэгт энэ шинж үндэслэгдсэн юм.

Иймд

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10}$$

тоог өөрөөр хэлбэл

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \text{ тоог}$$
$$(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) + B$$

хэлбэртэй бичиж болно. Үүнд B нь 3-д үлдэгдэлгүй хуваагдана. Эндээс

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

3-д хуваагдах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь тоо

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

3-д хуваагдах чанар болох нь харагдаж байна.

Тооллын системийн суурь 10 нь 5-д хуваагдах тул нэгжийн орноос бусад бүх орныг 5-д хуваахад үлдэгдэл нь тэг байдаг гэдгээс 5-д хуваагдах шинж гарна.

Мөн үүн дээр 2-д хуваагдах шинж тулгуурласан: тэгш цифрээр төгссөн тоо тэгш байна.

9-д хуваагдах шинж нь мөн 3-д хуваагдах шинжийн адил 10 хэлбэрийн тоо бүрийг 9-д хуваахад үлдэгдэл нь 1 байдаг гэдгээс гарна.

Эдгээр бүх шинжүүд нь тооны чухам аравтын систем дэх дүрслэлтэй холбоотой ба хэрэв 10-аас ялгаатай, өөр ямар нэгэн тооллын системийг ашиглавал эдгээр шинжийг ерөнхийдээ хэрэглэж болохгүй гэдэг нь дээр ярьснаас тодорхой байна. Жишээ нь: 86 тоо нь наймтын системд $(126)_8$ хэлбэртэй бичигдэх ба (учир нь $86 = 8^2 + 2 \cdot 8 + 6$) түүний цифрүүдийн нийлбэр нь 9 боловч 86 нь 0 ба 3-ийн алинд нь ч хуваагдахгүй.

Гэвч тооллын ямар ч оронт системийн хувьд түүний өөрийнх нь аль нэгэн тоонд хуваагдах шинжийг томьёолж болно. Хэдэн жишээ авч үзье.

Тоог арван хоёртын системд бичсэн бичлэгийн хувьд 6-д хуваагдах шинжийг томьёолъё. Тооллын системийн суурь 12 нь 6-д хуваагдах тул арван хоёртын системд бичигдсэн тоо 6-д хуваагдах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь хэрэв түүний сүүлчийн цифр 6-д хуваагдах явдал болно (Энд аравтын системд тооны 5 ба 2-д хуваагдах шинжтэй адил байна).

2, 3, 4 нь 12-ын хуваагчууд мөн учраас хуваагдах дараахь шинжүүд үнэн байна. Арван хоёртын системд бичигдсэн тооны сүүлчийн орны цифр 2-д хуваагдвал (харгалзан 3 ба 4-д) тэр тоо 2-д хуваагдана. (харгалзан 3 ба 4-д) Арван хоёртын системийн хувьд хамааруулан дараахь хуваагдах шинжүүдийг батлахыг уншигчдадаа үлдээе:

а) $A = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{12}$ тооны сүүлчийн хоёр орны цифрээр үүссэн тоо $(a_1\ a_0)_{12}$ нь 8-д хуваагдаж байвал A нь өөрөө 8-д хуваагдана.

в) $A = (a_n\ a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{12}$ тооны сүүлчийн хоёр орны цифрээр үүссэн тоо $(a_1\ a_0)_{12}$ нь 9-д хуваагдаж байвал A нь 9-д хуваагдана.

г) Хэрэв A тооны цифрүүдийн нийлбэр $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ нь 11-д хуваагдаж байвал $A = (a_n\ a_{n-1} \ldots a_1\ a_0)_{12}$ тоо нь 11-д хуваагдана.

Тооны хуваагдахтай холбоотой бас хоёр бодлого авч үзье.

1. $A = (3630)_p$ тоо (p суурьтай системд бичигдсэн) 7-д хуваагддаг байг. Хэрэв $p \leqslant 12$ бол p нь хэдтэй тэнцэх ба түүний аравтын бичлэг нь ямар байх вэ?

Хэрэв $p \leqslant 12$ нөхцөл биелэхгүй бол энэ бодлогын шийд нь ганц байж чадах уу?

Хариу: $p = 7$ $A = (1344)_{10}$ Хэрэв p хэмжигдхүүн заагдаагүй бол шийд нь хязгааргүй олон байна. Чухамхүү p-ийн оронд $7k$ буюу $7k-1$ хэлбэрийн ямарч тоог авч болно. Үүнд $k = 1, 2 \ldots$

2. $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_1\ a_0)_p$ хэлбэрийн өөрөөр хэлбэл

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

тоо $(p-1)$-д хуваагдах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь:

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

нийлбэр $(p-1)$-д хуваагдах явдал мөн гэдгийг батал. Аравтын системийн 9-д хуваагдах шинж, арван хоёртын системийн 11-д хуваагдах шинжтэй харьцуулна уу).

8 §. Хоёртын систем

Тооллын системийн суурь болгон авч болох тоонуудын хамгийн бага нь 2-ын тоо юм. Энэ суурьт харгалзах хоёртын систем гэж нэрлэгдэх тооллын систем нь маш эртний системүүдийн нэг юм.

Австрали ба Полинезийн зарим нэгэн омог нь үүнийг нэлээд бүдүүлэг байдлаар хэрэглэж байжээ. Энэ системийн тохиромжтой тал нь түүний ер бусын энгийн байдагт оршино. Хоёртын системд зөвхөн 0,1 цифрүүд оролцох ба 2 нь хоёрдугаар орны нэгж болно. Хоёртын системд бичигдсэн тоонуудын дээрх үйлдлүүдийн хүрд нь тун хялбар байдаг. Нэмэхийн үндсэн дүрэм нь дараахь тэнцлүүдээр тодорхойлогдоно.

$$0+0=0;\ 0+1=1;\ 1+1=(10)_2$$

Хоёртын системийн хувьд үржихийн хүрд нь

	0	1
0	0	0
1	0	1

хэлбэртэй байна.

Хоёртын системийн нэг сул тал нь, суурь нь бага учраас бага тооны бичлэгт ч гэсэн олон тэмдэг ашиглах хэрэгтэй болдогт оршино. Жишээ нь: 1000 нь хоёртын системд арван цифрийн тусламжтайгаар бичигддэг.

1111101000

Техникийн янз бүрийн салбарт ялангуяа орчин үеийн тооцон бодох машинд хоёртын системийн өргөн тархах шалтгаан болсон хэд хэдэн давуу чанараараа энэ сул талаа бараг анхаарахгүй болгодог юм. Хоёртын системийн техник хэрэглээний талаар бид хожим авч үзэх ба одоо тоог хоёртын системд бичихтэй холбогдсон хоёр бодлого авч үзье.

Бодлого 1. Би 1-ээс 1000 хүртэлх ямар нэгэн бүхэл тоо санав. Хэрэв асуулт болгонд би зөвхөн "тийм" эсвэл "үгүй" гэж хариулах бол надаас та 10-аас илүү "тийм" гүй асуулт асууж санасан тоог олж чадах уу?

Амжилтанд гарцаагүй хүргэх боломжит цуврал асуултуудын нэг нь дараахь асуудал мөн.

1 дүгээр асуулт. Санасан тоогоо 2-т хуваахад үлдэгдэлгүй хуваагдах уу? Хэрэв тийм гэж хариулбал тэг цифрийг бичих ба "үгүй" гэвэл нэгийг бичнэ. (Өөрөөр хэлбэл бид санасан тоог 2-т хуваахад үлдсэн үлдэгдлийг бичнэ).

2 дугаар асуулт. Анх хуваахад ноогдсон ноогдворыг 2-т хуваахад үлдэгдэлгүй хуваагдах уу? (Дахин "тийм" гэж хариулбал тэгийг, "үгүй" гэж хариулбал нэгийг бичнэ).

Мөн энэ маягаар дараахь асуултуудыг асууна. Өөрөөр хэлбэл "Өмнөх хуваалтанд ноогдсон ноогдворыг 2-т хуваахад үлдэгдэлгүй хуваагдах уу? "тийм" гэж хариулах бүрд бид нэгийг бичих ба "үгүй" гэж хариулбал тэгийг бичнэ.

Бид энэ үйлдлийг 10 удаа давтаж тэг буюу нэгээс бүрдсэн 10 цифртэй болно. Энэ цифрүүд нь олох тооны хоёртын систем дэх бичлэг мөн гэдэгт үнэмшихэд хэцүү бишээ. Бидний асуултуудын систем нь үнэндээ ямар нэгэн тоог хоёртын системд шилжүүлэхэд хэрэглэдэг тэр үйлдлүүдийг давтаж байна. 1-ээс 1000 хүртэлх ямарч тоог хоёртын системд 10-аас илүүгүй тэмдгийн тусламжтайгаар бичиж болдог учраас арван асуулт асуухад хангалттай байна. Хэрэв санасан тоог хоёртын системд бичигдсэн байсан гэж санавал түүнийг олж болох асуултуудын систем нь маш амархан болно.

Энэ үед цифр бүрийн тэгтэй тэнцүү эсэхийг асуух хэрэгтэй.

Өмнөхтэй агуулгаараа ойролцоо өөр бодлогыг авч үзье.

2 дугаар бодлого. Надад тус бүрд нь шатрын хөлгийн адил 64 нүдтэй, эдгээрийн нүднүүдэд 1-ээс 127 хүртэлх янз бүрийн тоонуудыг бичсэн 7 хүснэгт байна гэе (хүснэгтийг үз).

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95
97	99	101	103	105	107	109	111
113	115	117	119	121	123	125	127

1

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63
66	67	70	71	74	75	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95
98	99	102	103	106	107	110	111
114	115	118	119	122	123	126	127

2

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95
100	101	102	103	108	109	110	111
116	117	118	119	124	125	126	127

3

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63
72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95
104	105	106	107	108	109	110	111
120	121	122	123	124	125	125	127

4

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	89	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

5

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

6

64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

7

Та эдгээр тоонуудаас аль нэгийг санаж аль хүснэгтүүдэд байгааг (1-ээс 7 хүртэл) над хэлбэл би энэ тоог олно. Ямар аргаар олох вэ?

Энэ төвөггүй илбийг тайлахын тулд 1-ээс 127 хүртэлх бүх тоог хоёртын системд бичье. Эдгээр тоонуудын аль нь ч хоёртын системд долоогоос илүүгүй цифрээр бичигдэнэ (Тухайлбал $127=(1111111)_2$ Хэрэв A тооны хоёртын бичлэгийн *в* дугаар нэгжийн оронд ($k=1,2...7$) нэг байвал түүнийг k дугаар хүснэгтэнд бичих ба хоёртын бичлэгийн k дугаар нэгжийн оронд нэг байвал түүнийг тэнд бичихгүй. Жишээ нь: хоёртын бичлэг нь 0111001 байх тоо 57 нь нэг, дөрөв, тав, зургадугаар

0111001

хүснэгтэнд бичигдэх ба 1 нь зөвхөн нэгдүгээр хүснэгтэнд 127 нь бүх долоон хүснэгтэнд бичигдэнэ. Иймд та өгөгдсөн тоо аль аль хүснэгтэнд агуулагдаж байгааг хэлсээрээ түүний хоёртын бичлэгийг мэдээлэх ба үүнийг зөвхөн аравтын системд шилжүүлэх л үлдэнэ.

Асуултыг үүний урвуугаар тавьж болно. Над 1-ээс 127 хүртэлх ямар ч тоог хэлбэл би түүний аль аль хүснэгтэнд байх аль хүснэгтэнд байхгүйг хэлье. Энэ асуултыг хариулахын тулд нэрлэсэн тоог хоёртын системд шилжүүлж (Бага зэрэг дадалтай бол үүнийг цээжээр бодоход хялбархан) нэг байх тийм орнуудын дугаарууДыг нэрлэх хэрэгтэй[1].

9 §. «Ним» гэдэг тоглоом

(Гурван хэсэг чүдэнзээр тоглох тоглоом)

«Ним» гэж нэрлэгдэх дараахь тоглоомоор бүр эртний хятадад тоглож байжээ. Гурван хэсэг чулуу байна. Энэ тоглоомд хоёр хүн тоглоно. Тоглогч бүр аль дуртай хэсгээс (гэхдээ зөвхөн нэгээс л) ээлжлэн (тэгээс ялгаатай тооны) чулуу авна.

[1] Дээрх таблиц бүрд тоонууд нь өсөх дараалалтай бичигдсэн учраас эдгээр хүснэгтүүдийн зохион байгуулалтыг илрүүлэхэд хялбар байна. Гэвч хүснэгт бүрд тоог дурын аргаар сэлгэж тавих замаар эдгээр хүснэгтүүдийн зохион байгуулалтыг нууцалж болно.

Сүүлчийн чулууг авсан тоглогч хожно. Орчин үед чулуунуудын оронд жишээ нь чүдэнз мэтийн ойр дөхөм зүйлийг ашиглах ба энэ тоглоомыг «чүдэнзээр тоглох тоглоом» гэж нэрлэдэг.

Чулууг чүдэнзээр (эсвэл ямар ч өөр зүйлээр) сольсноос хэргийн гол өөрчлөгдөхгүй нь тодорхой.

Хоёр тоглогч оновчтой тактик баримталбал энэ тоглоомын төгсгөл ямар байхыг тайлбарлах ба энэ оновчтой тактик гэдэг нь юу гэсэн үг вэ? гэдгийг тайлбарлахад бодлогын учир оршино.

Энэ бодлогыг бодохын тулд хоёртын системийг ашиглавал тохиромжтой. Гурван хэсэг тус бүрд харгалзан a,b,c чүдэнзүүд байсан байг. a,b,c тоонуудыг хоёртын системд бичье.

$$a = a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$$
$$b = b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + b_1 \cdot 2 + b_0$$
$$c = c_m \cdot 2^m + c_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + c_1 \cdot 2 + c_0$$

Энд a,b,c тоонуудыг ижил оронтой гэж тооцож болно.

Учир нь Хэрэв цөөн оронтой тоо байвал тэрхүү тооны өмнө зохих тооны тэгийг бичиж оронг тэгшитгэж болно. Иймд учраас a_0, b_0, $c_0 \ldots$, a_m, b_m, c_m цифрүүд нь 0 буюу 1 байж болох ба a_m, b_m, c_m цифрүүдийн ядаж нэг нь (бүгдээрээ албагүй) тэгээс ялгаатай байна. Анхны нүүдлийг хийсэн (чулуу авсан) тоглогч a, b, c тоонуудын аль нэгийг дураар багасгаж чадна. Тэр нэгдүгээр хэсгээс чүдэнз авахаар шийдсэн гэж бодъё. Өөрөөр хэлбэл a тоог өөрчлөнө. Энэ нь $a_0, a_1, \ldots, a_m$ цифрүүдийн зарим нь өөрчлөгдөнө гэсэн үг. Үүнтэй адилаар тоглогч хоёрдугаар хэсгээс чүдэнз авбал b_0, $b_1, \ldots$ b_m цифрүүдийн ядаж нэгийг өөрчлөх ба гуравдугаар хэсгээс чүдэнз авбал $c_0, c_1, \ldots, c_m$ цифрүүдийн ядаж нэгийг өөрчлөх болно.

Одоо дараахь нийлбэрүүдийг авч үзьё.

$$a_m + b_m + c_m;\ a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1}, \ldots,\ a_0 + b_0 + c_0 (*)$$

Эдгээр нийлбэр тус бүр нь 0, 1, 2, 3-ын аль нэгтэй нь тэнцүү байж болно. Хэрэв эдгээрийн ядаж нэг нь сондгой бол (өөрөөр хэлбэл 1 буюу 3-тай тэнцүү бол) анх нүүсэн тоглогч хожиж чадна. Үнэндээ (*) нийлбэрүүдийн (зүүнээс баруун тийш тоолоход) нэгдүгээр нийлбэр $a_k + b_k + c_k$ нь сондгой байг. Энэ үед a_k, b_k, c_k

гурван тооны ядаж нэг нь 1-тэй тэнцүү байна. Жишээ нь $a_k = 1$ байг. Энэ нөхцөлд $a_m, \ldots\ a_{k+1}$ коэффициентуудыг хувиргахгүйгээр a_k нь тэгтэй тэнцүү ба $a_{k-1} \ldots a_0$ коэффициент тус бүр нь нүүж байгаа тоглогчийн хувьд ашигтай утга 0 эсвэл 13 авсан байхаар тийм тооны чүдэнзийг тоглогч нэгдүгээр хэсгээс авч болно.

Иим учраас бүх

$$a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-1}, \ldots, a_0 + b_0 + c_0$$

нийлбэрүүд тэгш байхаар тийм тооны чүдэнзийг нэгдүгээр хэсгээс авч болно. Өөрөөр хэлбэл тоглоомыг эхлэгч нь түүний нүүдлийн дараа бүх (*) нийлбэрүүд тэгш болсон байхаар нүүж чадна. Хоёрдугаар тоглогч яаж ч нүүлээ гэсэн эдгээр нийлбэрүүдийн ядаж нэгийг сондгой болгоно. Иймд түүний нүүдлийн дараа (*) нийлбэрүүдийн ядаж нэг нь сондгой болох тохиолдол бас гарна. Үүний дараа нэгдүгээр тоглогч дахин бүх (*) нийлбэрүүд тэгш байхаар нүүж чадна. Иймд нэгдүгээр тоглогчдын нүүдэл бүрийн дараа бүх (*) нийлбэрүүд тэгш болох ба хоёрдугаар тоглогчийн нүүдэл бүрийн дараа (*) нийлбэрүүдийн ядаж нэг нь сондгой болно. Нүүдэл бүрийн дараа чүдэнзний тоо багасаж байгаа тул хэзээ нэгэн цагт бүх (*) нийлбэрүүд тэгтэй тэнцэнэ. Өөрөөр хэлбэл чүдэнз үлдэхгүй. Энэ үед бүх (*) нийлбэрүүд 0 тэгш тул нэгдүгээр тоглогчийн хэдэн нүүдлийн дараа л бүх (*) нийлбэрүүд тэгтэй тэнцэж байна. Иймд тэр хожно. Хэрэв анхны байдалд бүх (*) нийлбэрүүд тэгш байсан бол тоглоом эхлэгч яаж ч нүүсэн түүний нүүдлийн дараа (*) нийлбэрүүдээс ядаж нэг нь сондгой болох бөгөөд энэ үед хоёрдугаар тоглогч нэгдүгээр тоглогчийн дээр дурдсан тактик баримтлан тогловол хожиж чадна.

Иймд a, b, c тоонуудаар тоглоомын үр дүнг бүрэн урьдчилан тодорхойлж болно.

Хэрэв тэдгээрийн хувьд (*) нийлбэрүүдийн ядаж нэг сондгой бол нэгдүгээр тоглогч өөртөө хожил хангаж чадна. Хэрэв эдгээр бүх нийлбэрүүд нь тэгш бол хоёрдугаар тоглогч зөв тактик хэрэглэвэл хожно.

Хоёрдугаар тоглогчийн хувьд ашигтай тийм тооны гурвалууд нэлээд ховор тохиолддог гэдгийг ухаарахад хэцүү биш болно. Иим учраас a, b, c тоонууд нь санамсаргүй өгөгдөхөд хэрэв зөв тогловол нэгдүгээр тог-

логч бараг тогтмол хожно. Жишээ нь: Бид 10 чүдэнзтэй бол ($a+b+c=10$) тэдгээрийг 9 аргаар гурван хэсэгт хувааж болох ба тэдгээрийн 8 нь нэгдүгээр тоглогчийн, зөвхөн 1 нь хоёрдугаар тоглогчийн хожлыг хангана.

10§. Цахилгаан мэдээн дэхь хоёртын код

Хоёртын системийг техникт анх хэрэглэж байсан дээр үеийн нэг жишээ нь цахилгаан мэдээний код юм. Үсгийн дэс дараагаар орос хэлний үсгүүдийг бичиж «ё» ба «й» оролцуулалгүй, үсгийн хоорондох зай «—»-г оруулан) тэдгээрийг дэс дараалан дугаарлавал:

— А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р
, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ы Ь Ъ Э Ю Я
17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

Үсэг бүрийн дугаарыг хоёртын системд бичье. $2^5=32$ тул эдгээр дугаар тус бүрийг таваас ихгүй тэмдгүүдээр дүрслэнэ. Шаардлагатай зохих тооны тэг анхны утгат цифрийн өмнө нэмж эдгээр дугаар тус бүрийн чухамхүү таван тэмдгээр л бичнэ. Иймд:

$$
\begin{array}{lllllll}
— & \approx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
А & \approx & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
Б & \approx & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
— & — & — & — & — & — & — \\
Я & \approx & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$
болно.

Ямар нэгэн холбооны хоёр газрыг холбосон таван дамжуулагч шугам байгаа гэж үзье.

Энэ үед цагаан толгойн үсгүүдийг тэмдэглэсэн таван оронтой тоо болгоныг тийм шугамаар цахилгаан импульсын тодорхой эвлүүлгээр дамжуулж болно. Жишээлэхэд: тэгэд импульс байхгүй нэгэд дамжуулагчид импульс байх үеийг харгалзуулна. Эдгээр импульсын энэхүү эвлүүлэг (5 тоо) нэгдэж хүлээн авах газрын цахилгаан аппаратын хэвлэх төхөөрөмжийг ажиллуулж энэ үндсэн дээр өгсөн импульсын тухайн эвлүүлэгд харгалзах үсэг туузан дээр хэвлэгдэнэ (Хоёртын тооллын тоонуудаар).

Цахилгаан мэдээний аппарат нь үндсэндээ хоёр төхөөрөмжийн хослол юм. Үсгийг холбооны шугамаар илгээж болох импульс зохих систем болгон хувиргахад зориулагдсан нэвтрүүлэх хэсэг ба импульсын өгсөн эвлүүлгэд харгалзах үсгийг цахилгаан туузан дээр (эсвэл бланк дээр) хэвлэх хүлээн авах хэсгээс хоёр юм.[1] Цахилгаан мэдээнд чухамхүү хоёртын системийг хэрэглэсэн нь хоёртын систем дэхь тоог цахилгаан дохионуудын системд хувиргахад тохиромжтой байдагтай холбоотой нь илэрхий[2].

11. § Хоёртын систем нь нууц хадгалагч мөн

Цахилгаан мэдээ буюу радио цахилгаан мэдээ дамжуулах хэрэгсэл телеграф буюу радио телеграф нь ямар нэгэн хаягаар мэдээ яаралтай дамжуулах сайн хэрэгсэл юм. Гэвч тэр мэдээг өөр хүмүүс амархан барьж авч болох тул ихэнхдээ, ялангуяа дайны нөхцөлд мэдээ зориулагдсан хүнээсээ бусад хүмүүст мэдээ нь ойлгомжгүй байхаар хийх нь зайлшгүй болдог. Энэ зорилгоор сэдвийг нууцлах янз бүрийн арга хэрэглэдэг.

Уншигч та нараас олон хүн үүнээс урьд нууцлах янз бүрийн арга бодож «нууцаар» харилцан захиа бичиж байсан байж магадгүй. Цагаан толгойн үсэг бүрийг ямар нэгэн тэмдгээр, өөр үсгээр, тоогоор болзолт тэмдгээр тэмдэглэх гэх мэт нь тийм аргуудын хялбархан нь болно. Гэмт хэргийн тухай ба адал явдлын уран зохиолд тийм системүүд байнга дурдагдаж байдаг. Наад зах нь Конан-Дойлын «Бужиглэгч бяцхан хүмүүс» эсвэл Жюль Верний «Дэлхийн төвд аялсан нь» гэдэг зохиолуудыг санаяа. Ямар ч тийм системийг тайлахад хэцүү биш юм.

[1] Бид холбооны хоёр цэгийг холбосон таван дамжуулагчийн тухай ярьсан. Хэрэг дээрээ өгсөн үсэгт харгалзах тэр эвлүүлэг үүсгэж байгаа импульсуудыг нэг дамжуулагчаар дараалан дамжуулдаг юм.

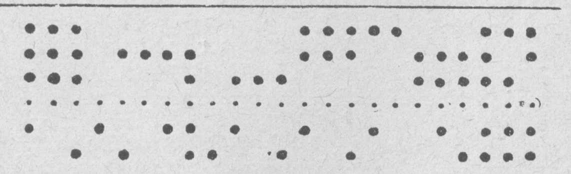
[2] Цахилгаан мэдээнд үсгийг дээр дурдсан таван тэг ба нэгээр тэмдэглэх системээс гадна **Морзын цагаан толгой** гэж нэрлэгдэх өөр кодын системийг өргөн хэрэглэдэг. Морзын цагаан толгой нь зарчмын хувьд үсгийг мөн л хоёр өөр элементийн (цэг ба зураас) эвлүүлэг хэлбэртэй дүрсэлдэг юм. Бид энд энэ системийг нарийн хэлэлцэхгүй.

Үүний учир нь ямар ч хэл, үүнд мөн орос хэл, тодор-хой зохион байгуулалтай байдагт оршино. Үүнд зарим үсэг ба үсгийн хос олон, зарим нь цөөн дайралдах ба мөн зарим нь (жишээ нь эгшгийн дараа зөөлний тэм-дэг) ер дайралддаггүй. Үсгүүдийг ямар ч тэмдгээр сольсон ч энэ зохион байгуулалт дараа хадгалагдан үл-дэх тул тийм системийн нууцын түлхүүрийг хялбархан тайлж болно. Үүнээс нэлээд илүү төвөгтэй системүүд байдаг боловч мөн тэдгээрийг туршлагатай нууц тай-лагч нарын тайлах нь ховор биш байдаг.

«Нууцыг баттай хадгалах тийм нууцын систем эсвэл зарчмын хувьд ямар ч нууцлагдсан мэдээг уншиж ча-дах хангалттай чадвартай нууц тайлагч байдаг уу?» гэдэг асуулт аяндаа гарна.

Үнэн хэрэгтээ маш хялбар боловч нууцын түлхүүр-гүй хүн нууцлагдсан сэдвийг огтхон ч уншиж чадахгүй гэдэг нь эргэлзээгүй тийм системийг амархан бодож болдог байна. Тийм системийг зохиохын тулд өмнө-зүйлд ярьсан хоёртын систем ба үсгийг таван оронтой хоёртын тоогоор бичлэг болон орлуулдгийг ашиглая.

Цахилгаан мэдээний кодын тусламжтай ямар ч сэд-вийг тэг ба нэгийн таван оронтой эвлүүлгийн тодорхой дараалал байдлаар бичиж болно. Тэг ба нэгийн тийм тавтуудын дурын ямар нэгэн дараалллыг бид урьд нь бэлдсэн гэж үзье Сэдвийг нууцлахад зориулагдсан тийм дараалалыг г а м м гэдэг. Бид гаммыг тусгай цаа-сан туузан дээр жишээ нь нүхнүүдийн дараалал хэл-бэртэй бичиж урьдаас бэлдэнэ (2 дугаар зураг) Туузан дээр хөндлөн эгнээ бүрд тодорхой таван оронт эвлүүлэг харгалзах ба цоолсон нүх нь нэгжийг, нүхгүй бол тэ-гийг заана. Гаммын нэгийг өөртөө үлдээж нөгөө хувийг цахилгаан мэдээ барьж байгаа хүнд илгээнэ.



2 дугаар зураг

Бид дараа нь дамжуулах гэж байгаа сэдвээ авч урьд нь бэлдсэн гаммтай «Орон бүрчлэн» нэмнэ. Энэ нь дараахь утгатай болохыг тайлбарлая. Сэдвийн анх-ны таван оронтой тоог (өөрөөр хэлбэл анхны үсгийг) гаммын анхны тоон дээр, сэдвийн хоёрдахь тоог гам-мын хоёрдахь тоотой гэх мэтчилэн нэмэх ба гэхдээ хоёр нэгжийн нийлбэр[1] (орон хэтэрвэл) дараачийн орны нэгж байдаг жирийн дүрмээр биш

$$0+0=0; 1+0=0+1=1; 1+1=0.$$

байх дүрмээр нэмнэ. Өөрөөр хэлбэл хоёр нэгжийн нийл-бэрийг ахмад оронд шилжүүлэхгүйгээр нэмнэ. Хоёртын хоёр тоог өөрөөр хэлбэл нэгж ба тэгийн ямар нэгэн хоёр дараалалыг ийм аргаар нэмбэл, хэрэв эдгээр тоо-нууд нь адилхан бол тэг гарах ба хэрэв өөр тоонуу-дыг нэмсэн бол тэгээс ялгаатай үр дүнд хүрнэ. Сэдэв ба гаммыг ингэж «Орон бүрчлэн» нэмэхэд гарсан нийл-бэрийг манай мэдээ хүлээн авагчид цахилгаан мэдээ-ний шугамаар цахилгаан дохионуудын систем хэлбэр-тэйгээр дамжуулж болно. Гэвч хэрэв энэ дараалалыг шууд цахилгаан мэдээний аппаратад оруулбал тэр нь учир утгагүй хэсэг үсгийг хэвлэх болно Анхны сэд-вийг дахин сэргээхийн тулд нууцлагдсан сэдэвт дахин мөн тэр гаммыг нэмэх хэрэгтэй (мөн тэр орон бүрчлэн нэмэх аргаар). Бүх үйлдлийг дараахь схемээр дүрслэж болно.

1. С э д э в + Г а м м = н у у ц л а г д с а н с э д э в.

2. н у у ц л а г д с а н с э д э в + г а м м = с э д э в + + г а м м + г а м м = с э д э в. Нууцлагдсан сэдвийг гартаа барьсан боловч харгалзах гамм байхгүй хүн бол түүний агуулгыг огт мэдэж чадахгүй гэдгийг ойлгоход амархан ба энэ нь үлгэрлэвээс хэрэв $x + y$ хэмжигд-хүүн мэдэгдэж байгаа боловч y нь ямар нэгэн дурын биднд үл мэдэгдэх тоо бол бид x хэмжигдхүүний тухай юу ч хэлж чадахгүйтэй адил болно. Дээр дурд-сан процессыг цахилгаан мэдээний аппаратын гаралт дээр нь нэвтрүүлж байгаа сэдэв ба гаммыг орон бүрч-лэн нэмдэг байгууламжийг тавьж хүлээн авах аппара-тын оролт дээр өөр мөн тийм байгууламжийг тавьж автоматаар хялбархан гүйцэтгэж болно. Дурдсан нууц-

лах систем нь нэлээд нүсэр болох нь мэдээж юм. Учир нь түүнийг гүйцэтгэхийн тулд шугамын хоёр төгсгөлд цаг ямагт нөөц гаммыг хүргэх хэрэгтэй бөгөөд тийм гамм бүр нь зөвхөн ганцхан удаа ашиглагдана. Энэ хоёртын системийг хэрэглэхэд тохиромжтойн учир нь гэвэл чухамхүү энэ системд ямарч тоог өөрийг нь өөр дээр нь нэмэхэд тэг гардагт оршино.

12§. Тооцон бодох машины тухай хэдэн үг

Харьцангуйгаар техникийн дээр үед гарсан ахмад салбар болох цахилгаан мэдээнд хоёртын системийг хэрэглэх талаар бид дээр ярьсан. (Цахилгаан дохиог утсаар дамжуулах дээр үндэслэсэн анхны цахилгаан мэдээний аппарат нь өнгөрсөн зууны 30-аад оны үед гарсан). Одоо бид хоёртын системийн сүүлийн үеийн хэрэглээний нэг болох тооцон бодох машинд түүнийг хэрхэн ашигладаг талаар товч авч үзье. Электрон тооцон бодох машин нь юу болох тухай ядаж ерөнхий тоймыг нь эхлээд хэлэх хэрэгтэй боллоо.

Тооцон бодох техникийн хөгжлийн түүх нь нэг талаар маш урт нэг талаар маш богино юм. Тооцон бодох ажлыг хөнгөвчилж хурдасгасан анхны тооцон бодох багажууд эрт дээр үед бий болжээ. Жишээ нь жирийн сампинг дөрвөн мянга гаруй жилийн өмнөөс хэрэглэж байсан боловч жинхэнэ «машины математик» нь барагцаалахад 15—20-иод жилийн өмнө радио электроникийн техник (радио ламп ба дараа нь хагас дамжуулагчууд) хэрэглэн гарсан анхны хурдан боддог тооцон бодох машинууд бий болсноор эхлэн үүссэн юм. Богинохон хугацааны дотор техникийн энэ салбар гайхалтай амжилтанд хүрсэн. Орчин үеийн тооцон бодох машинууд нь секундэд зуун мянга түүгээр ч барахгүй сая үйлдлийг хийх хурдтайгаар ажилладаг ба өөрөөр хэлбэл туршлагатай тооцон бодогч арифмометрээр (тооны машинаар) хэдэн сар хийх үйлдлийг тийм машин ганц секундэд гүйцэтгэдэг байна. Тийм машинууд гарснаар гар аргын үед хэлэхэд ч хэцүү байсан төвөгтэй нүсэр хүнд бодлогуудыг амжилттай бодох боломжтой болжээ. Жишээ нь орчин үеийн тооцон бодох машин нь хэдэн зуун үл мэдэгдэхтэй төчнөөн тооны нэгдүгээр

зэргийн тэгшитгэлүүдийн системийг бодох бүрэн чадалтай юм. Харандаа цаас буюу эсвэл тооны машинаар зэвсэглэсэн тооцон бодогч бол тийм бодлогыг бүх амьдралынхаа туршид ч бодож амжихгүй байсан билээ.

Хялбарчилсан ном зохиолд тооцон бодох машинуудын тухай дурдахдаа «Хүнд хэцүү тэгшитгэлүүдийг боддог машин», «Шатар тоглодог машин» «нэг хэлнээс нөгөө хэлэнд орчуулагч машин» зэргийн хэллэгүүдийг байнга хэрэглэдэг. Энэ үед, тэгшитгэл бодох, шатар тоглох, орчуулах гэх мэтийн үүрэгт ажлуудыг чухам ийм л үүрэгтэй тусгай машин гүйцэтгэдэг гэсэн буруу сэтгэгдэл төрж болох юм. Үнэн хэрэгтээ математикийн ба (тэгшитгэл бодох, логарифмын хүснэгт зохиох гэх мэт) математикийн бус жишээ нь сэдэв орчуулах, шатар тоглох төрөл бүрийн асуудлуудыг шийдэхэд универсал тооцон бодох машин гэж нэрлэгдэх зөвхөн ганц л төхөөрөмжийг ашиглаж болно. Үнэнийг хэлэхэд тийм машин болгон нь тоонуудыг нэмэх ба хуваах, гарсан үр дүнг машины «ой» гэж нэрлэгдэх тусгай төхөөрөмжинд хадгалах, хоёр эсвэл хэд хэдэн тоонуудыг хамгийн их буюу хамгийн багыг сонгон авч тоонуудыг хооронд нь жиших гэх мэтийн тун явцуу нэлээд хэдэн төрлийн цөөн тооны зөвхөн хэдхэн хялбар үйлдлүүдийг гүйцэтгэж чадна. Гэхдээ олон төрлийн хүнд төвөгтэй бодлогуудыг бодох явдлыг тийм хялбар үйлдлүүдийн дараалалд (маш урт байж болзошгүй) шилжүүлж болно. Энэхүү үйлдлүүдийн дарааллыг математикч-программын зохиосон программаар тодорхойлогдоно.Ийм учраас универсал тооцон бодох машины олон янзын бодлогуудыг бодож чаддаг байх нь энэ машинд өгөх программ олон янз байхаас хамаарна.

Ингэхлээр зарчмын хувьд, универсал тооцон бодох машин нь: нэмэх, үржих, хасах, хуваах болон тоог жиших зэргийн өөр хэд хэдэн арифметикийн үйлдлийг тоон дээр ер бусын түргэн гүйцэтгэж чаддаг гэхдээ чухам ямар үйлдлүүдийг ямар дараалалтай гүйцэтгэх нь программаар тодорхойлогдох төхөөрөмж юм.

Гараар эсвэл тооцон бодох машины алинаар ч тооцоо хийх үед үйлдэл хийх тоонуудаа ямар нэг байдлаар бичих хэрэгтэй болдог. Өөрөөр хэлбэл ямар нэгэн тооллын системийг ашиглах хэрэгтэй. Харандаа цаас ашиглан бодохдоо бид дадал болсон аравтын систе-

мээ хэрэглэнэ. Гэвч цахилгаан тооцон бодох машины хувьд бол аравтын систем нь тохиромж муутай байдаг. Тийм машин нь хоёртын системийг давуутай гэж үзнэ. Бид одоо үүний шалтгааныг тайлбарлахыг хичээе.

13§. Цахилгаан машин яагаад хоёртын системийг «эрхэмлэдэг» вэ?

Хэрэв бид тооцоог гараар хийх бол тоог харандаа буюу бэхээр цаасан дээр бичдэг. Машины хувьд бол тэр үйлдэл хийж байгаа тоонуудаа тэмдэглэх ямар нэгэн өөр арга хэрэгтэй. Үүнийг учрыг тайлбарлахын тулд эхлээд тооцон бодох машин биш түүнээс маш илүү энгийн жирийн тоолуурыг (цахилгааны, хийн, таксийн тоолуур гэх мэтийг) авч үзье.

Тийм ямар ч тоолуур нь тус бүр нь 0-оос 9 хүртэлх цифрүүдэд харгалзах 10 байрлалын аль нэгэнд байх хэдэн жижиг дугуйнуудаас тогтоно. k ширхэг жижиг дугуйнуудаас тогтсон тийм байгууламж нь 0-оос $\underbrace{99\ldots9}_{k}$ хүртэлх янз бүрийн 10^k тоог тэмдэглэж чадах нь тодорхой юм. Тийм тоонуудыг зөвхөн тоог тэмдэглэхэд төдий биш мөн арифметик үйлдлүүд гүйцэтгэх зорилгод нэгэн төрлийн самнингийн адил ашиглаж болно. Аравтын системд биш өөр ямар нэгэн суурьтай системд зохицсон тоолууртай байхыг бид хүссэн бол тийм тоолуур нь 10 биш харин p янзын байрлалд байж болох жижиг дугуйнуудаас тогтох байсан. Тухайлбал хоёртын системд бичигдсэн тоог тэмдэглэж болох тийм байгууламж тус бүр нь хоёр байрлалын алинд нь ч байрлах элементүүдийг агуулах ёстой болно. Тоолуурын бүтцэнд нь ямар нэгэн тооллын системд үндэслэгдсэн заавал жижиг дугуйнуудыг ашиглах нь албагүй гэдэг нь тодорхой юм. Зарчмын хувьд тоолуурыг ямар ч элементүүдээс хийж болох бөгөөд гэхдээ элемент бүр нь зөвхөн бидний сонгож авсан тооллын системийн суурь нь хичнээн нэгж агуулж байна мөн тэчнээн тооны тогтвортой байрлалтай байх нь чухал юм.

Дугуйны систем буюу эсвэл өөр ямар нэгэн механик төхөөрөмж бүхий тоолуур нь байрлалаа харьцангуй удаан өөрчилж чадна. Орчин үеийн тооцон бодох машинуудын ажилладаг хурд болох секундэд арав хэдэн зуун мянга сая үйлдлүүд нь эдгээр машинуудад механикийн биш харин цахилгааны төхөөрөмж ажилладаг болсноор боломжтой болсон байна. Тийм төхөөрөмж нь бараг инерцгүй учраас секундын саяны хувь болох эрэмбэтэй хугацааны дотор өөрийн байрлалаа сольж чаддаг байна.

Тооцон бодох машинд голлон ашигладаг радиоэлектроникийн элементүүдийн (радиолампа, хагас дамжуулагч элементүүд) хувьд хоёр тогтмол төлөв байдал байдаг онцлогтой юм. Жишээ нь электроны лампа нь «нээлттэй» (гүйдэл гүйж байхад) эсвэл «хаалттай» (түүгээр гүйдэл гүйгээгүй үед) байж болно. Сүүлийн үед тооцон бодох техникт өргөн хэрэглэгдэж байгаа хагас дамжуулагч элементүүд нь «тийм» буюу «үгүй» гэдэг зарчмаар ажилладаг юм.

Тооцон бодох машинд чухамхүү хоёртын систем хамгийн их тохиромжтой байдаг үндсэн шалтгаан нь радиоэлектроникийн элементүүдийн энэ чанар болно.

Ямар нэгэн бодох бодлогын өгөгдсөн зүйлүүд нь ихэвчлэн нийтэд түгсэн аравтын системд бичигдсэн байдаг. Иймд хоёртын системд тулгуурласан машин эдгээр мэдээнүүдийг боловсруулахын тулд уг мэдээ нь машины арифметикт байгууламжийн «ойлгомжтой» хэл болох хоёртын кодод (нэрд) шилжигдсэн байх ёстой. Ийм шилжүүлгийг автоматаар гүйцэтгэж болох нь эргэлзээгүй. Машины бодсон үр дүнг нь дахин аравтын системд бичих шаардлагатай. Ийм учраас тооцон бодох машинд хоёртын системд гарсан үр дүнг аравтын системд автоматаар шилжүүлэх байгууламжийг урьдчилан бодож байрлуулсан байдаг.

Тооцон бодох машинд бичлэгийн завсарын хэлбэр болгож гол төлөв хоёрт аравтын холимог системийн хэрэглэдэг. Тэр системд эхлээд тоог ердийн аравтын системийн тусламжтайгаар бичих ба дараа нь түүнд оролцсон цифр бүрийг тэг ба нэгээр хоёртын системд бичих явдал болно. Иймд ямар ч тоо нь хоёрт-аравтын системд нэг ба нэгээс зохиосон хэд хэдэн хэсэг хэлбэртэй бичигддэг.

Жишээ нь тоо

2593

хоёрт-аравтын системд

0010 0101 1001 0011

гэж бичигдэнэ. Харьцуулж үзэхийн тулд энэ тооны хоёртын бичлэгийг сийрүүлье.

10100010001

Хоёртын системд үндэслэгдсэн тооцон бодох машин нь арифметик үйлдлүүдийг яаж гүйцэтгэдгийг авч үзье. Авч үзвэл зохих үндсэн үйлдэл нь нэмэх үйлдэл болно. Учир нь үржих нь олон дахин нэмэхэд хасах нь эсрэг тоог нэмэхэд эцэст нь хуваах нь олон дахин хасах алхамд шилждэг. Олон оронтой тоонуудыг нэмэх үйлдэл нь болохоор орон бүрчлэн харгалзах үйлдлүүдийг гүйцэтгэхэд шилжинэ.

Хоёртын хоёр тооны орон бүрд нэмэх үйлдлийг дараахь маягаар дүрсэлж болно.[1]

a — нэгдүгээр нэмэгдхүүний өгөгдсөн оронд орших цифр

b — хоёрдугаар нэмэгдхүүний мөн тэр оронд орших цифр *c* нь өмнөх орноос шилжүүлэх хэрэгтэй цифр (энд бид нэмэх үйлдлийг гүйцэтгэсэн гэж үзэж байна) байг. Өгөгдсөн оронд нэмэх үйлдлийг гүйцэтгэнэ гэдэг нь нийлбэрийн тэрхүү оронд ямар цифр бичигдсэн байх ёстой ба дараачийн оронд юу шилжүүлэх ёстойг заана гэсэн үг мөн. Нийлбэрийн өгөгдсөн оронд бичигдэх ёстой цифрийг *s* үсгээр дараачийн оронд шилжүүлэх ёстой тэр хэмжигдхүүнийг *t* үсгээр тус тус тэмдэглэе.

a, *b*, *c*, *s*, *t* хэмжигдхүүн тус бүр нь зөвхөн 0 ба 1-ийн аль нэг утгыг авч болох тул бүх боломжит байдлыг дараахь хүснэгтэнд харуулав.

Ийм учраас хоёртын системд бичсэн хоёр тоог тооцон бодох машин нэмж чадахын тулд түүнд *a*,*b*,*c* хэмжигдхүүнүүдэд харгалзсан гурван оролттой *s*,*t* хэмжигдхүүнүүдэд харгалзсан хоёр гаралттай тийм байгууламж орон бүрийн хувьд байх ёстой болно. Электрон байгууламжуудад ихэвчлэн байдагтай адил тухайн оролт буюу гаралт дээр гүйдэлтэй бол нэгийг, гүйдэлгүй бол тэгийг заана гэж авч үзнэ.

Нэг оронт нийлбэржүүлэгч (сумматор) гэж нэрлэгдэх бидний авч үзэж байгаа байгууламж нь дээр

[1] Энд 11§-д сэдвийг нууцлах бодлоготой холбогдон дурдагдсан «орон бүрчлэн» нэмэх үйлдлийн тухай биш жирийн «арифметикийн» нэмэх тухай ярьж байна.

a	0	1	0	0	1	1	0	1
в	0	0	1	0	1	0	1	1
c	0	0	0	1	0	1	1	1
s	0	1	1	1	0	0	0	1
t	0	0	0	0	1	1	1	1

заасан хүснэгтийн дагуу ажиллах ёстой. Өөрөөр хэлбэл хэрэв аль ч оролт дээр үйлдэл өгөгдөөгүй бол мөн аль ч гаралт дээр гүйдэлгүй байх ёстой хэрэв гүйдэл *a*-д өгөгдсөн *b* ба *c*-д өгөгдөөгүй бол *s* дээр гүйдэлтэй *t* дээр гүйдэлгүй байх ёстой гэх мэт. Тийм маягаар ажиллах байгууламжийг электрон лампа ба хагас дамжуулагч элементүүдээр зохион бүтээх нь хэцүү биш юм.

14§. Гуравтын системийн нэгэн гайхамшигт чанарын тухай

Тооцон бодох машин зохион бүтээхдээ ямар нэгэн тооллын систем түүнд үндэс болоход хэр тохирох эсэхийг үнэлэхдээ тэрхүү тооллын системд арифметикийн үйлдлүүдийг гүйцэтгэхэд хэр зэрэг хялбар байхыг авч үзэхээс гадна мөн системийн хэмнэлттэй байх талыг авч үздэг. Систем хэмнэлттэй байна гэдэгт: тодорхой тооны тэмдгийн тусламжаар өгөгдсөн системд бичиж болох тоонуудын нөөц гэж ойлгоно. Үүнийг жишээн дээр тайлбарлая. Аравтын системд 0-оос 999 хүртэлх 1000 тоог бичихийн тулд 30 тэмдэг (орон бүрд 10 цифр) зайлшгүй хэрэгтэй. Харин хоёртын системд 30 тэмдгийн тусламжтайгаар 2^{15} өөр тоог (учир нь аль ч хоёртын орон бүрд зөвхөн хоёр 0 ба 1 цифрийн нэг байх тул бид 30 цифрийн тусламжтайгаар 15 хүртэл оронтой тоог бичиж чадна) бичиж болно.

$$2^{15} > 1000$$

учраас хоёртын 15 орноор аравтын гурван орноо бичдэгээс илүү их янз бүрийн тоог бичиж болно. Иймд хоёртын систем нь аравтын системийг бодвол илүү хэмнэлттэй юм. Тооллын ямар систем нь хамгийн хэмнэлттэй байдаг вэ? Энэ асуултанд хариулахын тулд дараахь тодорхой бодлого авч үзье.

Бидний мэдэлд 60 тэмдэг байсан байг. Бид тэдгээрийг тус бүрд нь 2 элемент байхаар 30 хэсэгт хуваажчадах ба тэдгээрийн тусламжтайгаар хоёртын системд хоёртын 30-аас ихгүй оронтой ямар ч тоог өөрөөр хэлбэл нийт 2^{30} тоог бичиж болно. Мөн эдгээр 60 тэмдгийг тус бүр нь 3 элементтэй 20 хэсэгт хувааж гуравтын системийг ашиглан 3^{20} өөр тоог бичиж чадна. Цааш нь 60 тэмдгийг тус бүр нь 4 элементтэй 15 хэсэгт хувааж дөрөвтийн системийг хэрэглэн 4^{15} тоо бичнэ гэх мэт.

Тухайлбал бүх тэмдгээ тус бүр нь 10 элементтэй 6 хэсэгт хуваак аравтын системийг ашиглан 10^6 тоог бичиж болох ба жартын (вавилоны) системийг ашиглаж 60 тэмдгийн тусламжтайгаар зөвхөн 60 тоог бичиж чадах байсан. Энд боломжийн системүүдээс аль нь хамгийн арвин байхыг өөрөөр хэлбэл өгөгдсөн 60 тэмдгийн тусламжтайгаар хамгийн их олон тоог бичиж болохыг харъя.

Өөрөөр хэлбэл

$$2^{30},\ 3^{20},\ 4^{15},\ 5^{12},\ 6^{10},\ 10^{6},\ 12^{5},\ 15^{4},\ 20^{3},\ 30^{2},\ 60$$

эдгээр тоонуудаас аль нь хамгийн их болох тухай ярьж байна. Энд хамгийн их тоо нь 3^{20} болно гэдгийг шалгахад амархан. Эхлээд

$$2^{30} < 3^{20}$$

гэдгийг харуулъя.

$$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10} \text{ ба } 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$$

учраас бидний тэнцэтгэл бишийг

$$8^{10} < 9^{10}$$

хэлбэртэй бичиж болно. Энэ хэлбэрт батлах тэнцэтгэл

$$2^{30} < 3^{20}$$

биш илэрхий боллоо.

Цааш нь

$$4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30}$$

учраас өмнө баталсан ёсоор $3^{20} > 4^{15}$ болно.

Үүнтэй адилаар дараахь тэнцэтгэл бишүүдийн гинжийн үнэн болохыг хялбархан шалгаж болно.

$$4^{15} > 5^{12} > 6^{10} > 10^{6} > 12^{5} > 15^{4} >$$
$$20^{3} > 30^{2} > 60$$

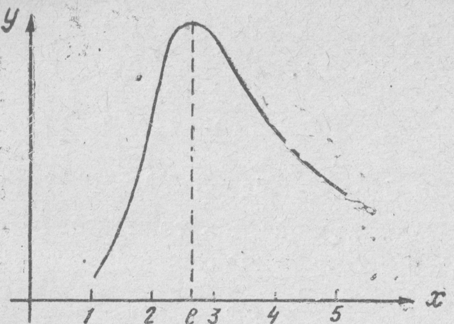
Ийнхүү гуравтын систем нь хамгийн хэмнэлттэй систем байна. Хоёртын систем болон хэмнэлттэй байх утгын хувьд түүнтэй адил чанартай дөрөвтийн систем нь энэ талаар гуравтын системээс нэлээд дутуу боловч бусад боломжит системүүдээс давуу байна.

Энэ гаргалгаа нь чухам 60 тэмдэг авч үзсэнтэй огт холбоогүй юм. Бид зөвхөн 60 тэмдгийг тус бүр нь 2, 3, 4 гэх мэт тэмдгүүдтэй хэсгүүдэд хуваахад тохиромжтой учраас энэ жишээг авч үзсэн болно. Ерөнхий тохиолдолд хэрэв n тэмдэг авч тооллын системийн суурь болгон ямар нэгэн x-тоог авбал түүний оронгийн тоо нь $\frac{n}{x}$ байх ба энэ үед бүгд

$$(x)^{\frac{n}{x}}$$

тоог бичиж болно.

Энэ илэрхийллийг зөвхөн бүхэл утга төдийгүй дурын (бутархай, иррациональ) эерэг утга авч болох x хувьсагчаас хамаарсан функц гэж авч үзье. Энэ функц максимум (хамгийн их) утгаа авах x хувьсагчийн тэр утгыг олж болно. Тэр нь дээд математикийн хамгийн түн олон янзын асуудалд чухал үүрэг гүйцэтгэдэг



3 дугаар зураг.

натурал логарифм гэж нэрлэгдэх логарифмын суурь болох иррациональ тоо e-тэй тэнцүү байна[1].
e тоо нь ойролцоогоор

2, 718281828452045 . . .

тэнцүү байдаг. e-д хамгийн ойр бүхэл тоо нь 3 болно. Иймд 3 нь хамгийн арвин, тооллын системийн суурь болно.

$y=(x)\frac{n}{x}$ функцийн график нь 48 дугаар зураг дээр зурагдсан болно. (x ба y тэнхлэгийн дагуу ялгаатай масштаб авав) тооллын системийн арвин чанар бол түүнийг тооцон бодох машинд ашиглахын үүднээс нь авч үзвэл багагүй чухал тал юм.

---

[1] Дифференциал тооллын эхлэлтэй танил уншигчдад зориулж харгалзах гаргалгааг хийе. $y(x)$ функц өгөгдсөн x_0 цэг дээр максимум утгыг авах зайлшгүй нөхцөл нь түүний уламжлал нь энэ цэг дээр тэгтэй тэнцэх явдал байдаг. Өгөгдсөн тохиолдолд $y(x)=x^{\frac{n}{x}}$ Энэ функцийн уламжлал нь

$$\frac{d_y}{d_x}=\frac{-n}{x^2}(x)^{\frac{n}{x}}$$

$$\ln x+\frac{n}{x}(x)^{\frac{n}{x}-2}=n(x)^{\frac{n}{x}-2}(1-\ln x) \quad \text{байна.}$$

Түүнийг тэгтэй тэнцүүлж бодвол $\ln x=1$ өөрөөр хэлбэл $x=e$ болно. Уламжлал $\frac{dy}{dx}$ нь $x=e$ цэгийн зүүн талд эерэг баруун талд сөрөг тул дифференциал тооллын хялбар теорем ёсоор функц нь энэ цэг дээр максимумтай байна.

Иймучраас тооцон бодох машинд хоёртын системийн оронд гуравтын системийг хэрэглэх нь зохион бүтээхэд ямар нэгэн төвөгтэй байдлыг (энэ үед тус бүр нь хоёр биш гурван тогтмол төлөв байдалд байж болох тийм элементүүдийг ашиглах хэрэгтэй болно) учруулах боловч зарим нэгэн одоо байгаа тооцон бодох байгууламжид энэ системийг ашигласан болно.

15§. Хязгааргүй бутархайн тухай

Одоо хүртэл бид бүхэл тоонуудын тухай ярьсан. Бүхэл тооны аравтын бичлэгээс аравтын бутархайд шилжих нь зүйтэй. Үүний тулд 10-ын сөрөг биш зэргүүдээс гадна (өөрөөр хэлбэл 1, 10, 100 гэх мэт) түүний сөрөг зэргүүдийг (10^{-1}, 10^{-2} гэх мэт) авч үзэж тэдгээрийн аль аль нь оролцсон эвлүүлгийг зохиох хэрэгтэй болно.

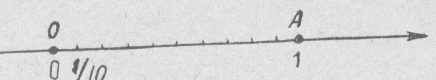
Жишээ нь:

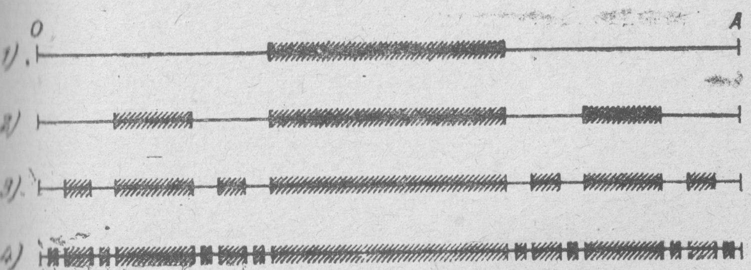
23,581

гэсэн илэрхийлэл нь:

$$2\cdot10^1+3\cdot10^2+5\cdot10^{-1}+8\cdot10^{-2}+1\cdot10^{-3}$$

болохыг заана гэх мэт.





4 дүгээр зураг

Янз бүрийн тоонуудыг шулуун дээр цэгээр дүрслэхэд тохиромжтой байдаг. Ямар нэгэн шулуун авч түүн дээр тодорхой o цэг (тооллын эх) эерэг чиглэл (баруун тийш нь) ба масштабын нэгж OA хэрчмийг тус тус сонгож авна (4 дүгээр зураг). O цэг нь тэгийг, A цэг нь нэгжийг дүрсэлж байна гэж үзнэ. O цэгээс баруун тийш OA хэрчмийг хоёр, гурав гэх мэтээр үргэлжлүүлэн таслаж хоёр, гурав гэх мэт тоонуудад харгалзах цэгүүдийг гаргана. Ийм замаар шулуун дээр бүх бүхэл тоог дүрсэлж болно. Аравтын ба зуутын гэх мэт хувьтай бутархай тоонуудыг дүрслэхийн тулд OA хэрчмийг арав, зуу гэх мэт хэсэгт хувааж уртын эдгээр бага нэгжүүдийг ашиглах хэрэгтэй. Ийм замаар бид шулуун дээр

$$a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0,\ b_1\, b_2 \ldots b_n$$

хэлбэрийн бүх боломжит тоонуудад өөрөөр хэлбэл бүх боломжит аравтын бутархайнуудад харгалзах цэгүүдийг тэмдэглэж чадна. Энэ үед шулуун дээр орших бүх цэгүүдийг тэмдэглэхгүй нь эргэлзээгүй. Жишээ нь хэрэв шулуун дээр о цэгээс нэгж талтай квадратын диагональтай тэнцүү хэрчмийг таслахад, квадратын тал ба диагональ нь өөр хоорондоо хэмжилгүй учраас энэ хэрчмийн төгсгөл нь ямар нэгэн аравтын бутархайд харгалзсан цэг болж чадахгүй.

Хэрэв бид шулууны цэг болгонд ямар нэгэн бутархайг харгалзуулахыг хүсвэл зөвхөн төгсгөлөг төдийгүй мөн төгсгөлгүй аравтын бутархайнуудыг авч үзэх хэрэгтэй болно. Үүний утгыг тайлбарлая. Шулууны цэг болгонд ямар нэгэн (төгсгөлгүй аравтын бутархайг дараахь маягаар харгалзуулъя.

Тохиромжтой болгохын тулд бүх шулууны тухай түүний тодорхой хэсэг болох бидний масштабын нэгж болгож авсан OA хэрчмийн тухай ярих болно. x — нь энэ хэрчмийн ямар нэгэн цэг байг. OA хэрчмийг 10 тэнцүү хэсэгт хувааж тэдгээрийг 0-оос 9 хүртэлх цифрээр дугаарлая. x цэгийн орших жижиг хэрчмийн дугаарыг b_1-ээр тэмдэглэе. Энэ жижиг хэрчмийг дахин 10 хэсэгт хуваахад үүссэн хэсгүүдийг 0-оос 9 хүртэлх цифрээр дугаарлаж x цэгийн орших байгаа тэр жижиг хэрчмийн дугаарыг b_1 гэж тэмдэглэе. b_2 дугаартай хэрчмийг дахин 10 хэсэгт хуваагаад дээрх үйлдлийг дав-

таж b_3-ийг олно. Алхам бүрд өмнөх алхамд гарсан хэрчмийг 10 хэсэгт хуваах замаар энэ үйлдлийг хязгааргүй үргэлжлүүлэх болно.

Үүний үр дүнд бид

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n, \ldots$$

гэсэн цифрүүдийн дараалыг гаргах ба үүнийг

$$o,\ b_1\, b_2 \ldots b_n \ldots$$

хэлбэртэй бичиж x цэгт харгалзах хязгааргүй аравтын бутархай гэж нэрлэх болно.

Бид энэ бутархайг аль нэг газраа нь таслаж x цэгийн шулуун дээрх байрлалыг нарийн биш ойролцоогоор (хэрэв хязгааргүй бутархайг n-дүгээр цифрээр нь таславал үндсэн хэрчмийн $\frac{1}{10^n}$ хэсгийн нарийвчлалтайгаар) тодорхойлох өөрийн (төгсгөлөг) аравтын бутархай $o,\ в_1,\ в_2 \ldots вn$-ийг гаргана.

Ингэж бид шулууны цэг болгонд нэг төгсгөлгүй аравтын бутархайг харгалзуулав. Энэ үед тодорхой биш зүйл зайлшгүй гарахыг ашиглахад хэцүү биш болно.

Энэ OA хэрчмийг 10 хэсэгт хувааж жишээ нь нэг ба хоёрдугаар хэсгийн хил дээр орших цэгийг авч үзэхэд чухамдаа ийм гарна. Түүнийг бид нэгдүгээр (0 дугаартай ба хоёрдугаар (1 дугаартай) хэсгийн алинд нь ч хамааруулж болох билээ. Нэгдүгээр тохиолдолд бид дараалан хуваах үйлдлийг үргэлжлүүлэхэд сонгосон цэг нь өмнөх алхамд гарсан хэрчмийн хуваалтын хамгийн баруун хэсэгт (өөрөөр хэлбэл дугаар нь 9 байх) байхыг олж илрүүлэх ба өөрөөр хэлбэл түүнд хязгааргүй аравтын бутархай

$$0{,}09999\ldots$$

харгалзах ба хоёрдугаар тохиолдолд энэ цэг нь дараалсан хуваалт бүрд дугаар нь 0 байх хэсэгт орох тул

$$0{,}1000\ldots$$

бутархай харгалзана.

Иймд бид, ижил ганц цэгт харгалзах хоёр хязгааргүй бутархайг олов. Ямар нэг дараалсан хуваалтын үед хилийн (хоёр хэрчмийн хооронд) ямарч цэгийн хувьд үүнтэй адил байдал гарна. Жишээ нь:

$$0{,}125000 \text{ ба } 0{,}124999\ldots$$

бутархайнууд шулуун дээр адилхан нэг цэгээр дүрслэгдэнэ.

Хилийн цэг бүрийг түүнийг агуулж байгаа хэрчмүүдийн эсвэл дандаа баруунд нь эсвэл дандаа зүүнд нь харгалзуулахыг тохирсны үндсэнд энэ тодорхой биш байдлыг арилгаж болно. Өөрөөр хэлбэл бид эсвэл дан ганц тэгээс тогтсон «хязгааргүй сүүлтэй» бүх бутархайнууд буюу эсвэл дан ганц есөөс тогтсон «хязгааргүй сүүлтэй» бүх бутархайнуудын аль нэгийг зайлуулж чадна.

Тийм зааглалыг оруулсны үндсэнд хэрчмийн ямарч x цэгт цор ганц бүрэн тодорхой хязгааргүй аравтын бутархайг харгалзуулж болох ба энэ үед ялгаатай хоёр цэгт ялгаатай хоёр бутархай харгалзана.

Бид хэрчим дээрх цэгийн байрлалыг дараалан хуваах аргын тусламжтайгаар тэмдэглэхийг хүсэхдээ тухай бүр харгалзах өмнөх хэрчмээ чухамхүү 10 хэсэгт хуваасан нь огт чухал биш юм.

Энэ нь зөвхөн, бидний аравтын системд дадал болж түүнтэй. ажиллаж сурсны илрэл болно. Аравын оронд ямар нэгэн тоо тухайлбал хоёрыг авч өөрөөр хэлбэл хэрчмийг тухай бүр дундуур нь хуваaж нэг хагаст нь дугаар 0, нөгөө хагаст нь дугаар 1-ийг бичиж дараа нь авч үзэж байгаа цэгийн орших тэр хагасыг сонгож авч болох байсан. Энэ үед бид цэг болгонд тэг ба нэгээс тогтох b_1, b_2, b_3 дарааллыг харгалзуулах ба түүнийг

$$(o,\ b_1\ b_2\ldots b_n)_2$$

хэлбэртэй бичиж хязгааргүй хоёртын бутархай гэж нэрлэх нь зүйтэй байсан. Энэ дарааллыг аль нэг газраар нь таславал төгсгөлөг хоёртын бутархай

$$(o,\ b_1,\ b_2\ldots b_n)_2$$

буюу өөрөөр хэлбэл авч үзэж байгаа цэгийн байрлалыг

үлдсэн хэрчмийн $\frac{1}{2^n}$ хэсэг хүртэл нарийвчлалтай тодорхойлох тоо

$$b_1\cdot\frac{1}{2}+b_2\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+b_n\cdot\frac{1}{2^n}$$

үүснэ.

Шулуун дээрх бүх, цэгийг дүрсэлж болох хязгааргүй аравтын бутархайнууд нь дээд математикийн олон салбарын суурь болдог бодит тооны онолын байгууллтанд тохиромжтой хэрэгсэл болдог юм. Энэ үед аравтын биш өөр ямар нэгэн (жишээ нь хоёртын, гуравтын гэх мэт) хязгааргүй бутархайнуудыг мөн ийм үр дүнтэйгээр ашиглаж болно.

Эцэст нь дараахь сургамжтай бодлогыг авч үзье. Дахин OA хэрчмийг авч түүнийг гурван тэнцүү хэсэгт хуваaж дунд хэсгийг нь орхие. (Хуваалтын цэгүүд нь мөн энэ дунд хэсэгт байгаа гэж үзээд тэдгээрийг мөн авч хаяна) (4 б дугаар зураг). Дараа нь үлдсэн хэсэг тус бүрийг мөн дахин гурван тэнцүү хэсэгт хуваах ба тэдгээрийн дунд хэсгүүдийг мөн авч хаяна. Энэ үйлдлийг хязгааргүй үргэлжлүүлье. Энэ үед OA хэрчмийн хичнээн цэг үлдэх вэ? гэсэн асуулт тавья.

Анх харахад тийм «цэвэрлэгээний» үр дүнд зөвхөн захын цэгүүд O ба A үлдэх мэт санагдаж болно. Энэ нь дараахь дүгнэлтээр батлагдаж байгаа мэт санагдана. Дээр дурдсан үйлдлийн үед хаягдсан бүх хэрчмүүдийн уртыг олъё (OA хэрчмийн урт нь 1 гэдгийг сануулъя).

Анхны алхамд бид $\frac{1}{3}$ урттай нэг хэрчмийг хоёрдугаар алхамд тус бүр нь $\frac{1}{9}$ урттай хоёр хэрчмийг гуравдугаар алхамд тус бүр нь $\frac{1}{27}$ урттай дөрвөн хэрчмийг гэх мэтээр бид авч хаяна. Бүх хаягдсан хэрчмүүдийн урт нь

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots$$

тай тэнцүү байх ба энэ нь анхны гишүүн нь $\frac{1}{3}$, ху-

ваарь нь $\frac{2}{3}$ байх хязгааргүй буурах геометрийн прогресс болно. Түүний нийлбэр нь бидний мэдэх томьёо ёсоор

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1$$

тай тэнцүү байна.

Иймд хаягдсан хэрчмүүдийн уртуудын нийлбэр нь анхны OA хэрчмийн урттай яг адил байна.

Гэвч дээр дурдсан үйлдэл нь хэрчим дээр O ба A цэгүүдээс гадна бас хязгааргүй олон цэгийг хаялгүй үлдээдэг юм. Үүнийг үнэмшихийн тулд дараахь зүйлийг хийе. OA нэгж хэрчмийн цэг бүрийг гуравтын сиетемд бичсэн хязгааргүй бутархайн тусламжтайгаар дүрсэлье. Тийм бутархай бүр нь тэг, нэг, хоёроос тогтоно. Дээр дурдсан «дунд талыг нь хаях» үйлдэлд гуравтын бичлэгт нь ганц ч нэг ороогүй байх тийм цэгүүд (өөрөөр хэлбэл зөвхөн тэг ба хоёроос тогтох) үлдэнэ гэж би баттай хэлж чадна. Үнэндээ анхны алхмын үед нэгж хэрчмийн дунд хэсэг буюу нэгдүгээр байранд нь нэг байх тийм гуравтын бутархайнуудад харгалзах цэгүүдийг бид авч хаясан. Хоёрдугаар шатанд бид дахин үлдсэн хэсэг тус бүрийн дунд хэсэг буюу хоёрдугаар байранд нь нэг байх тийм бутархайнуудыг авч хаясан гэх мэт (Энэ үед бид гуравтын хоёр бутархайгаар дүрслэгдэх ба эдгээрийн ядаж нэг бутархай нь нэгийг агуулах тийм цэгийг мөн хаясан). Жишээ нь: OA хэрчмийн гурав хуваасны эхний хэсгийн төгсгөл буюу тоо $\frac{1}{3}$ -ийг

$$0{,}1000$$
$$0{,}0222\cdots$$

бутархайнуудаар дүрсэлж болох ба энэ цэгийг бид хаясан.

Иймд дээрх үйлдэл нь OA хэрчим дээр зөвхөн тэг ба хоёроос тогтох бутархайнуудад харгалзах цэгүүдийг үлдээж байна. Тийм бутархайнууд хязгааргүй олон болохоор OA хэрчим дээр түүний төгсгөлүүдээс гадн

хязгааргүй олон цэг үлдэж байна. Жишээ нь: тоо $\frac{1}{4}$ -ийн гуравтын задаргаа болох

$$0{,}020202\ldots$$

бутархайд харгалзах цэг үлдэнэ. Үнэндээ төгсгөлгүй гуравтын бутархай

$$0{,}020202\cdots \text{ нь}$$
$$2\cdot 3^{-2}+2\cdot 3^{-4}+2\cdot 3^{-6}+\cdots$$

геометрийн прогрессын нийлбэр бөгөөд дээр дурдсан томьёо ёсоор энэ нийлбэр нь

$$\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{4}$$

-тэй тэнцүү байна. Дараахь тодорхой харагдах геометр сэтгэлгээний үндсэнд $\frac{1}{4}$ цэг нь хаягдалгүй үлдэнэ гэдэгт үнэмшиж болно.

Энэ цэг нь бүх хэрчим $[0.1]$-ийг $1:3$ харьцаагаар хуваана. $\left[\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right]$ хэрчмийг авч хаясны дараа цэг $\frac{1}{4}$ кв нь $\left[0;\ \frac{1}{3}\right]$ хагас завсарт үлдэх ба түүнийг $3:1$ харьцаагаар хуваана. Хоёр удаа хаясны дараа тэр нь $\left[\frac{2}{9};\ \frac{1}{3}\right]$ завсарт үлдэх бөгөөд түүнийг $3:1$ харьцаагаар хуваана гэх мэтээр аль ч алхамд цэг $\frac{1}{4}$ нь хаягдахгүй.

Иймд дээр дурдсан «Дунд талыг нь хаях» үйлдлийн дунд хэрчим дээр «огт байр эзэлдэггүй» боловч (бидний олсон ёсоор бүх хаягдсан хэрчмүүдийн урт нь нэгтэй тэнцүү байсан) хязгааргүй олон цэгийг агуулдаг тийм цэгүүдийн олонлог байдаг нь мэдэгдэж байна. Эдгээр цэгүүдийн олонлог нь өөр сонирхолтой чанаруудтай бөгөөд тэдгээрийг судлах нь бидний энэ жижиг номын хүрээнээс гарах ойлголт ба мэдэгдхүүнүүдийг шаардах тул үүгээр номоо дуусгая.

ЕР БУСЫН АЛГЕБР

Өмнөх үг

Тус товхимол нь Москвагийн математикийн 24 дүгээр олимпиадад оролцсон 8 дугаар ангийн сурагчдад 1966 оны 4 дүгээр сарын 20-д зохиогчийн уншсан лекцийн агуулгыг тусгажээ. Энэхүү товхимлын тэр лекцээс ялгагдах гол зүйл гэвэл зүйл бүр дасгалтай тэдгээрийн арай хүндий нь одоор тэмдэглэсэнд оршино. Номын төгсгөлд зарим дасгалын хариу заавар хавсаргав. Уншигчдад бүх дасгалыг биш ч гэсэн тэдгээрийн ихэнхийг бодохыг зөвлөе, зөвхөн ингэж ажилласнаар л уг номыг үнэхээр ойлгож эзэмшиж чадна. Жижгээр бичигдсэн хэсгийг эхний үед уншихгүй байж болно.

Товхимлыг бичихдээ зохиогч өөрийн бичсэн: «Олонлогийн ба хэллэгийн алгебр» (Детская энциклопедия, Т. II, «Просвещение» 1964. 383—392 тал ба «Булийн алгебр» (Сборник «О некоторых вопросах современной математики и кибернетики,» «Просвещение» 1965, 230—324 тал) өгүүллүүдийг ашиглав.

Товхимлын төгсгөлд заагдсан нэмэлт зохиолууд нь Булийн алгебртай гүнзгий танилцахад ашигтай.

Зохиогч үнэт зөвлөлгөө өгсөн явдалд Г. С. Г Гиндикинд, өөрийн санаачилгаар редакторласан явдалд Ф. И. Кизнерт талархлаа илэрхийлж байна.

Москва, октябрь 1966
И. М. Яглом

1 §. Тоон буюу олонлогийн алгебр

Бид арифметик[1] ба алгебрийн хичээлд янз бүрийн оонуудыг судалдаг. Нэгдүгээр ангидаа хүүхдүүд бүхэл оотой тааралдахад тэдгээрийн ихэнх нь энэ тооны таар ямар нэг хэмжээний мэдлэгтэй ирдэг болохоор эдэнд бэрхшээл учирдаггүй юм. Гэтэл цаашид улам үр шинэ шинэ «тоо» гарч ирнэ. Одоо бид тэдэнд хэийнээ дасчихаад тэд ч бидний гайхлыг төрүүлээ байжээ. Тооны ойлголтыг өргөтгөх шат бүхэндээ ид ямар нэг хуурамч ойлголт төрүүлдэг зүйлүүдээс алах хэрэгтэй болдог.

Тэр олонлог хичнээн юмсыг агуулж байна вэ? гэсэн суултанд бүхэл тоо хариу өгнө. Тэгвэл бутархай юунд ариу өгөх вэ? Ангид

$33\frac{1}{3}$ сурагч эсвэл ширээн дээр $3\frac{1}{4}$ таваг байж болохгүй шүү дээ. Гэтэл ширээн дээр $4\frac{1}{2}$ алим байж олно, кино $1\frac{3}{4}$цагт гарч болно. Үүгээр бид юмс бурхай тоогоор хэмжигдэж болно гэдэгт дөнгөж дасаж мжлаа. Сөрөг тоонууд яаж гарч ирэх вэ? Шүүгээнд-3 ом байж яагаад ч болохгүй. Энэ бол ёстой байж болохгүй зүйл. Гэтэл термометр-5° зааж болно, эсвэл амд-50 мөнгө байж болно, энэ сүүлчийнх нь зөвхөн чиий хувьд бол уйтгартай; харин математикийн хувьд бол йм биш юм. Гэтэл ахлах ангиудад бол бүр «аймшигай» тоонууд эхлээд $\sqrt{2}$ мэтийн иррационал тоонууд рчуулахад «бодлогогүй» ухаангүй» гэсэн утгатай ланы «irrationalls» гэдэг үгээр эдгээр тоог нэрлэжээ,

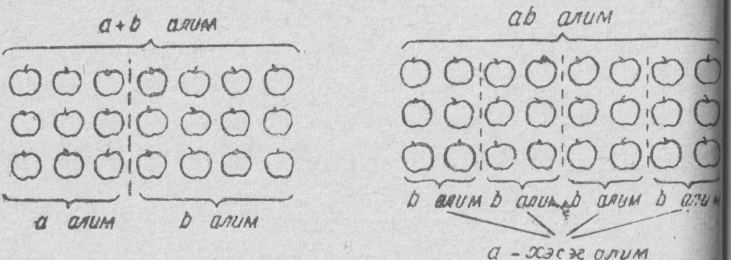
[1] Хуучин системийн сургуулийг ярьж байна хэв. ред

харин сүүл рүүгээ 1+2i[1] мэтийн хуурмаг тоонууд гар ирдэг ба тийм тоонуудад хүмүүс дасаагүй байхдаа яаж харьцаж байсныг энэхүү нэрс харуулж байна. Одоохон доо чи энэ тоонуудыг мэдэхгүй, тэдгээртэй танилца асуудал чиний өмнө тулгарч байгаа[2] ч гэсэн энэ чин номыг уншихад саад болохгүй.

Иррационал ба хуурмаг тоонууд нь юмсын тоо хэм жээг тодорхойлох тооны тухай анхны ойлголтоос хич нээн хол ч гэсэн, тэднийг «тоо» гэж нэрлэдэг.

Энэ олон янзын тоонуудад ямар ерөнхий зүйл бай гаагаас тэдгээрийг «тоо» гэдэг нэгэн адил нэрээр нэр лэх болоо вэ? Энэ бүх хэлбэрийн тоонуудын хоорон дохь үндсэн төсөө нь гэвэл эдгээрийг нэмж, үржиж болдогт оршино.

Гэтэл энэ төсөө нь ч хэлбэр төдий юм. Учир нь гэ вэл бүх хэлбэрийн тоог нэмж, үржүүлж чаддаг ч гэсэ энэ үйлдлүүд нь янз бүрийн тохиолд янз бүрийн утг санаатай байдаг юм. Жишээ нь a ба b гэсэн хоёр бү хэл эерэг тоог нэмэх гэдэг нь нэгдүгээр нь a юмста



5 дугаар зураг

6 дугаар зураг

---

[1] Одоо үед 2i эсвэл $\sqrt{2i}$ мэтийн тоонуудыг тоо (цэвэр хуу маг тоо) гэсэн нэр томьёог хэвээр үлдээгээд харин 1+2i мэти тоонуудыг комплекс тоо гэж нэрлэх болжээ. $1, -\frac{3}{2}, \sqrt{2}$ мэтийн тоонуудыг бодит тоо гэдэг.

[2] Төрөл бүрийн тоонуудын талаар А. Нивен, Числа рационал ные и иррациональные, «Мир» 1966 гэдэг хялбархан номыг унш болно.

[3] Гэвч хасах юмуу хуваахгүй. Учир нь хэрэв бид зөвхөн эер тоонуудыг мэдэж байвал 3-аас 5-ийг хасаж чадахгүй, харин б зөвхөн бүхэл тоонуудыг мэдэж байвал 7-г 4-т хувааж чадахг билээ.

хоёрдугаар нь b юмстай хоёр олонлогийн нэгдэлд байх юмсын тоог олно гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл 7[а] ангид 35 сурагч 7[б] ангид 39 сурагч байдаг гэвэл долоогийн энэ хоёр ангид 35+39=74 сурагч суралцана мөн (5 дугаар зургийг хар).

Үүний адилаар эерэг бүхэл тоо a ба b-г үржүүлэх гэдэг нь тус бүр нь b юмстай a ширхэг олонлогийн нэгдэлд байх юмсын тоог олно гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл сургуульд долоогийн гурван бүлэгтэй ба бүлэг бүр нь 36 сурагчтай гэвэл уг сургууль долдугаар ангийн $3\cdot 36=108$ сурагчтай гэсэн үг (6 дугаар зургийг хар).

гэтэл бутархай дээр юмуу сөрөг тоон дээр (иррациохал юмуу хуурмаг тооны тухай цаашид онцгойлон ярихгүй юм) хийх нэмэх ба үржих үйлдлийг саяын тодорхойлсон байдлаар өгөх боломжгүй юм.

Тийнхүү бид дараахь дүгнэлтэд хүрч ирэх шиг боллоо. Өөр төрлийн тоонуудыг нэгэн адил «тоо» гэж нэрлэдгийн учир нь тэдгээрийг бүгдий нь нэмж ба үржиж болдогт оршино. Гэтэл өөр өөр төрлийн тоонуудын хувьд нэмэх үржих хоёр үйлдэл нь эрс өөр өөр утгатай байна. Гэтэл энд бид жаахан яарчээ: Бүхэл ба бутархай тоог нэмэх нь үнэндээ тийм ч их ялгаатай үйлдэл биш л дээ. Нарийвчлан хэлбэл, энэ үйлдлүүдийн *тодорхойлолт* нь үнэндээ ялгаатай, харин эдгээрийн *чанар* яг адил юм. Ямарч төрлийн тооны хувьд

$$a+b=b+a \qquad ab=ba$$

нэмэхийн байр солих хууль — үржихийн байр солих хууль

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (ab)c=a(bc)$$

нэмэхийн бүлэглэх хууль — үржихийн бүлэглэх хууль

$$a+0=a \quad \text{ба} \quad a\cdot 1=a$$

чанартай, хоёр «онцгой» 0,1 тоо оршино. Орчин үеийн алгебрийн хувьд гэвэл ийм үзэл нэвт шингэжээ: алгебр нь тооны ямар нэг (гэхдээ янз бүрийн) системийг судлах бөгөөд, тэдгээрийн хувьд нэмэх ба үржих хоёр үйлдэл тодорхойлогдсон ба эдгээр үйлдэл нь дээр

бичсэн чанаруудыг хангахаас гадна бас уг системийн дурын a,b,c гурван тооны хувьд

$$(a+b)c=\underset{\text{нээх хууль}}{ac+bc}$$

гэсэн чанарыг нэмэх үйлдлийн хувь дахь үржих үйлдлийн хаалт нээх хууль хангана.

Тооны системд нэмэх үржих хоёр үйлдлийн хувьд харсаар байтал төсөө байна. Энэ нь нэмэх үйлдлийн чанар олон талаар үржих үйлдлийн чанарыг санагдуулдагт оршино.

Тухайлбал,

$$\frac{\text{нэмэх}}{\text{хасах}}=\frac{\text{үржих}}{?}$$

гэсэн ер бусын «пропорцод» тусгагджээ. Хэнээс ч асуухад энэ пропорц гэдэг нь юу гэсэн үг вэ? гэхэд нэг их бодолгүй асуултын тэмдгийн оронд «хуваах» гэж бичдэг. Мөн сурагчид төдийгүй заримдаа эх эцэг ч «эсрэг тоо» (өгөгдсөн a тоон дээр нэмэхэд нийлбэр нь 0 гарах-a тоо) «урвуу тоо» (өгөгдсөн a тоог үржүүлэхэд үржвэр нь 1 гарах $\frac{1}{a}$ тоо) гэсэн хоёр «томьёог» хутгадаг.

Дээрх хоёр үйлдлийн төсөө нь мөн арифметикийн прогресс (аль ч зэргэцээ хоёр тооны ялгавар нь нэгэн адил байх тооны цуваа) геометрийн прогресс (аль ч зэргэцээ хоёр тооны ноогдвор нь нэгэн адил байх тооны цуваа) хоёрын чанар төсөөтэй байдагт тусгагддаг.

Гэтэл энэ төсөө нь юм болгон дээр илрэх нь албагүй. Жишээ нь 0 тоо нэмэх үржих хоёр үйлдлийн алины нь ч хувьд онцгой үүрэгтэй. Ямар ч a тооны хувьд

$$a\cdot 0=0$$

байна (эндээс тухайлбал 0-ээс ялгаатай тоог 0-д хуваах болохгүй гэж гарна). Гэтэл сүүлийн тэнцэтгэлд үржихийг нэмэхээр, тэгийг нэгээр соливол

$$a+1=1 \text{ гэсэн зөвхөн } a=0^{1}$$

үед л хүчинтэй байх утгагүй «тэнцэтгэлд» хүрч ирнэ.

Цаашилбал $(a+b)c=ac+bc$ гэсэн хаалт нээх хуульд нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр соливол

$$ab+c=(a+c)\quad(b+c)$$

гэсэн «тэнцэтгэлд» хүрэх бөгөөд мэдээж хэн ч үүнийг зөвшөөрөхгүй [учир нь, $(a+c)\ (b+c)=ab+ac+bc+c^2=$ $=ab+c(a+b+c)$ тул $(a+c)\ (b+c)=ab+c$ тэнцэтгэл нь зөвхөн $c=0$ буюу $a+c+b=1$ тохилдолд л биелнэ.]

Гэвч алгебрт тоон биш өөр системүүд байдаг. Тийм системд нэмэх, үржих үйлдлийг тодорхойлж болох бөгөөд тэдгээр нь харин ч хоорондоо тооны нэмэх ба үржих хоёр үйлдлээс ч илүү төсөөтэй байдаг. Тийм нэг чухал систем «олонлогуудын алгебрыг» авч үзье.

Ямарваа юмсын дурын цуглуулгыг олонлог гэж ойлгоё. Уг юмсыг олонлогийн *элемент* гэнэ. Жишээ нь «7 а ангийн сурагчдын олонлог» «дугуйн цэгийн олонлог», «квадратын цэгүүдийн олонлог» «Менделеевийн үелэх системийн элементүүдийн олонлог», «тэгш тоонуудын олонлог», «Энэтхэгийн заануудын олонлог», «танай ангийхны зохион бичлэгт алдсан хэлзүйн дүрмийн алдааны олонлог» гэх мэт.

«Хоёр олонлогийг нэмэх»-ийг яаж тодорхойлох нь илэрхий юм.

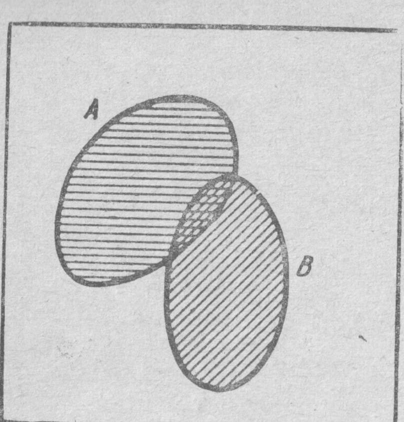
А ба В олонлогийн нийлбэр А+В гэж энэхүү хоёр олонлогийн нэгдлийг хэлнэ. Жишээ нь A нь танай ангийн хөвгүүдийн олонлог, B нь охидын олонлог бол $A+B$ нь танай ангийн нийт сурагчдын олонлог болно. Хэрэв A нь тэгш натурал тоонуудын олонлог, B нь 3-т хуваагдах натурал тоонуудын олонлог бол $A+B$ нь

$$\{2,3,4,\ 6,8,9,10,12,14,15\ \ldots\}$$

олонлог болно. Хэрэв A нь 7 дугаар зураг дээрх хэвтээ шугамаар зураaслагдсан дүрсийн цэгүүдээс тогтох олонлог, B нь ташуу шугамуудаар зураaслагдсан дүрсийн цэгүүдээс тогтох олонлог бол $A+B$ нь 7 ду-

---

[1] Хэрэв ямарваа a-гийн хувьд $a+1=1$ тэнцэтгэл хүчинтэй бол 1-ээс ялгаатай ямарч тооноос 1-ийг хасах боломжгүй болно. Гэтэл энэ нь худал юм, учир нь $3-1=2$ байдаг шүү дээ.



7 дугаар зураг

гаар зураг дээрх бүх зураасլагдсан дүрс болно. Ямар ч A ба B олонлогийн хувьд

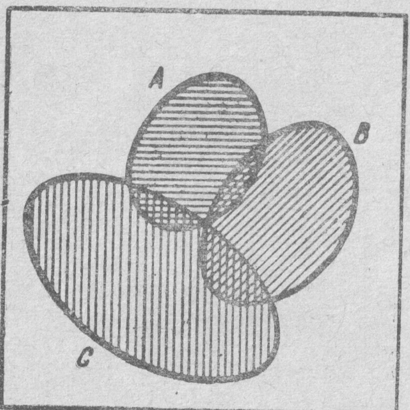
$$A+B=B+A$$

байх нь илэрхий (7 дугаар зургийг хар), өөрөөр хэлбэл олонлогуудын нэмэх үйлдлийн хувьд байр солих (коммутатив) хууль биелнэ. Цаашилбал ямарч A,B,C олонлогийн хувьд ямагт

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

биелнэ. Өөрөөр хэлбэл олонлогийн нэмэх үйлдлийн хувьд бүлэглэх (ассоциотив) хууль биелнэ. $(A+B)+C$ (эсвэл $A+(B+C)$) олонлогийг зүгээр л $A+B+C$ гэж тэмдэглэж болно. Энэ нь A,B,C гэсэн гурван олонлогийн нэгдлийг дүрслэнэ (8 дугаар зураг дээр $A+B+C$ олонлог нь бүх зураасլагдсан дүрстэй давхцана)

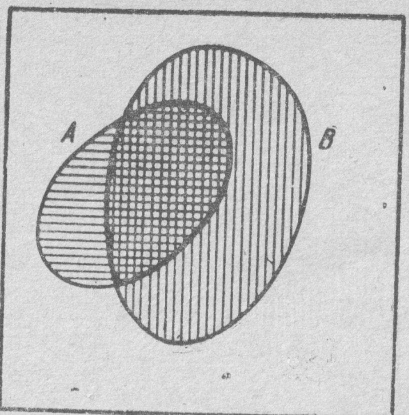
A,B хоёр олонлогийн ерөнхий хэсэг буюу огтлолцлыг энэ хоёр олонлогийн үржвэр AB гэж нэрлэе.



8 дугаар зураг

Жишээ нь A нь танай ангийн шатарчдын олонлог, B нь усанд сэлэгчдийн олонлог бол AB нь танай ангийн усанд сэлж чаддаг шатарчдын олонлог болно.

A нь тэгш тоонуудын олонлог B нь 3-т хуваагдах натурал тоонуудын олонлог бол AB нь $\{6,12,18,24,...\}$ гэсэн 6-д хуваагдах тоонуудаас тогтох олонлог болно.



9 дүгээр зураг

A нь 9 дүгээр зураг дээрх хэвтээ шугамаар зураасլагдсан муж, B нь босоо шугамаар зураасլагдсан муж ба AB мөн. зураг дээрх хэвтээ ба босоо шугамаар зураасլагдсан «торын» цэгүүдээс тогтох олонлог болно.

Олонлогийн үржих үйлдлийн хувьд байр солих хууль биелэх нь илэрхий, өөрөөр хэлбэл ямарваа A,B олонлогийн хувьд

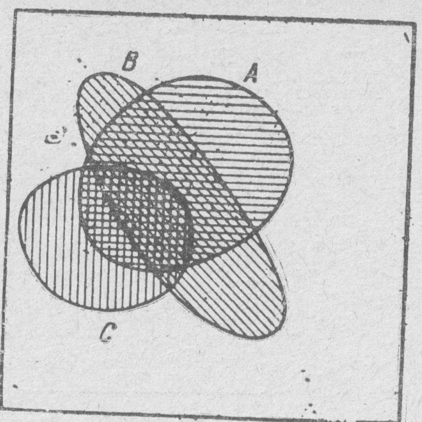
$$AB=BA$$

байна (9 дүгээр зураг үз). «AB нь сэлж чаддаг шатарчдын олонлог» ба «BA нь шатар тоглож чаддаг сэлэгчдийн олонлог» бол энэ хоёр нэгэн адил олонлог байх нь илэрхий). Цаашилбал *олонлогуудын үржих үйлдлийн хувьд бүлэглэх хууль*, өөрөөр хэлбэл ямарч A,B,C гурван олонлогийн хувьд

$$(AB)\ C=A(\ BC)$$

биелэх нь илэрхий $(AB)\ C$ эсвэл $A\ (BC)$ олонлогийг хаалтгүйгээр зүгээр л ABC гэж тэмдэглэнэ. Энэ нь A,B,C гурван олонлогийн ерөнхий хэсэг буюу огтлолцлыг дүрсэлнэ (10 дугаар зураг дээр ABC нь гурвалсан зураастай муж юм[1]).

Ямарч A,B,C гурван олонлогийн хувьд *$(A+B)\ C=AC+BC$ хаалт нээх хууль бас биелдэг нь гайхалтай юм.* Үнэндээ A-нь танай ангийн шатарчдын олонлог B нь даамчдын олонлог, C нь усанд сэлэгчдийн олонлог бол $A+B$ нь шатарчид буюу даамчдын олон-



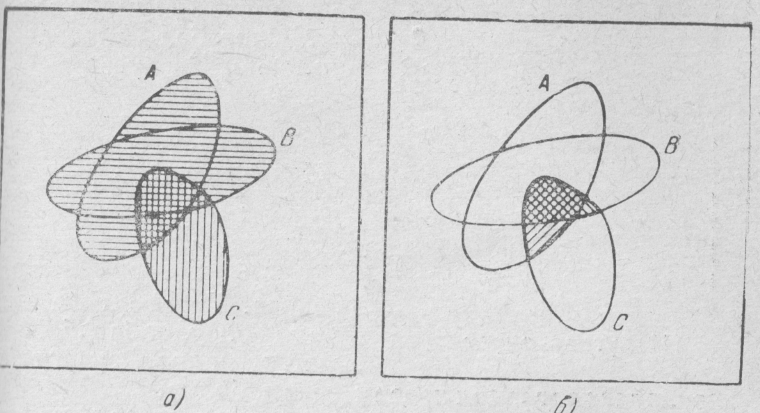
10 дугаар зураг

лсг өөрөөр хэлбэл шатар даам хоёрын ядаж нэгий н тоглож чаддаг сурагчдын олонлог (шатар ба даамы хоёулангий нь тоглодог ч байж болно). $(A+B)$ C н $A+B$ олонлогт буй сэлж чаддаг сурагчдын олонлог Гэтэл AC гэсэн сэлж чаддаг шатарчдын олонлог б BC гэсэн сэлж чаддаг даамчдын олонлогоос $AC+B$(гэсэн нийлбэр зохиовол мөн дээрх $(A+B)$ C олонло л гарна.

Хаалт нээх хуулийг ингэж үгээр тайлбарлах нь чам нүсэр юм шиг санагдаж болно. Тийм үед график зу раглалыг ашиглах нь ашигтай. 11 дүгээр зургийн а)- $A+B$ олонлог нь хэвтээ шугамаар зурааслагджээ, ха рин C нь босоо шугамаар, тэгвэл $(A+B)$ C олонло нь «торон» шугамаар бүрхэгдсэн олонлог болно. 11б)- AC ба BC хоёр олонлог харгалзан баруун ба зүү тийш ташсан налуу шугамаар зурааслагдсан хэсэг Энэ үед $AC+BC$ нь энэ зураг дээрх бүх зураасласа дүрстэй давхцана. 11 дүгээр зургийн б) дээрх AC- BC дүрс нь 11 дүгээр зургийн а) дээрх давхар зураас тай $(A+B)$ C дүрсээс ялгагдахгүй.

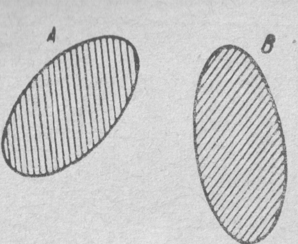
Ямар «олонлог» манай «олонлогийн алгебрт» тэгий үүрэг гүйцэтгэхийг хялбархан харж болно. Ямарч олон лог дээр тийм олонлог O-ийг[1] нэмэхэд («тэг олонло гийг» тэг тооны бичлэг 0-тэй төсөөтэйгээр O гэж тэм

[1] Хоосон олонлогийг ер нь ∅ гэж тэмдэглэдэг. Хэв ред.



11 дүгээр зураг

дэглэх болно) тэр олонлогийг өөрчлөхгүй байхын тулд O олонлог нь нэг ч элементийг агуулаагүй «хоосон» байна гэсэн үг. Хэрэв O олонлог нь элемент агуулахгүй бол энэ нь дэмий юм, түүний тухай юу ч ярих хэрэггүй! Түүнийг авч үзэхгүй байж болмоор санагдаж болно. Гэтэл тэгж үзэж болно гэжүү, тэгийг тооны олонлогоос хасаж болно гэж үү? Хэрэв O тоо байгаагүй бол нэг тоог нөгөөгөөс нь хасаж чадахгүйсэн (учир нь тэр үед 3—3 ялгавар нь юутай ч тэнцэхгүйсэн) мөн тоог тухайлбал 108-г аравтын системд бичихэд их бэрхшээлтэй (нэг зуут, найман нэгж, харин аравт огт байхгүй) байна. Энэчлэн олон зүйлийг бид хийж чадахгүйд хүрнэ. Тэг гарч ирсэн явдлыг бүх л арифметикийн түүхэн дэх хамгийн гайхамшигт үйл явдал гэж үздэг. Яг үүний адилаар хоосон олонлогийг олонлог гэж тооцохгүй бол хоёр олонлогийн үржвэрийг (огтлолцлыг) олж чадахгүй. Жишээ нь 12 дугаар зураг дээрх A,B хоёр олонлогийн огтлолцол хоосон. Мөн танай ангийн онцчуудын олонлог ба заануудын олонлогийн огтлолцол хоосон байна. «Хоосон олонлог» гэсэн ухагдхуунаас татгалзвал бид олонлогийн тухай маш бэлгоомжтойгоор ярих хэрэгтэй болно. «хотын 6 дугаар сургуулийн 5 дугаар ангийн 25 настай сурагчдын олонлог «хоосон, өөрөөр хэлбэл тийм олонлог огт байхгүй болоход хүрнэ.



12 дугаар зураг

Хэрэв O нь хоосон олонлог бол ямарваа A олонлогийн хувьд

$$A+O=A$$

Мөн ямарваа A олонлогийн хувьд, ямагт

$$AO=O$$

байна. Танай ангийн охидын олонлог ба 2,5 *м*-ээс илүү өндөр сурагчдын олонлогийн огтолцол хоосон гэхэд болно.

Харин «нэгж олонлог I» гэж яризал нэлээд төвөгтэй. Энэ олонлог I-ийг (1 тооны бичлэгтэй төсөөтэйгээр I гэж тэмдэглэв). Дурын A олонлогоор үржүүлэхэд A олонлог гарах ёстой тул I олонлог нь ямарч A олонлогийн бүх элементийг агуулах ёстой. Элементүүд нь ямар нэг тодорхой юмсын нөөцэд «элементүүд нь байх» авагдах тийм A олонлогуудыг л авч үзвэл нэгж олонлог оршиж болох нь илэрхий. Нэг тодорхой сургуулийн юмуу ангийн сурагчдын олонлогийн хувьд ярихад A нь онцчуудын олонлог, B нь шатарчдын олонлогийг зааж байж болно. Мөн натурал тоогоор хязгаарлахад A нь тэгш тоонуудын B нь энгийн тоонуудын олонлог гэх юмуу 7,12 дугаар зургууд дээрх квадратуудын доторхи тодорхой дүрсийн цэгүүдээс тогтох олонлог гэж ярьж болно. Энэ үед бидний авч үзэж буй «юмсыг» агуулсан хамгийн том олонлогийг I гэж ойлгоно. Тэр нь авч үзэж буй сургуулийн юмуу ангийн бүх сурагчдын олонлог, эсвэл бүх натурал тооны олонлог эсвэл квадратын бүх цэгийн олонлог (13 дугаар зураг). Энэ I олонлогийг «олонлогийн алгебрт» ***нэгж олонлог*** эсвэл ***универсал олонлог*** гэдэг. Ингэвэл ямарч «бага» A олонлогийн хувьд A нь мөн I-тэй давхцаж болно).

$$AI=I$$

болно.

Тийнхүү бидний байгуулсан «олонлогийн алгебр» дахь үйлдлийн хуулиуд нь бидний сайн мэдэх тоонуудад хамаарах алгебрийн хуулиудтай олон талаар тэстэй боловч ч адил биш байна. Тухайлбал $a\cdot 0=0$ тэнцэтгэлд үржвэрийг нийлбэрээр, тэгийг нэгжээр солиход гарсан дүрэм тооны хувьд хүчингүй, бараг бүх a тооны хувьд $a+1\neq 1$ билээ. Тэгвэл олонлогийн алгебрт иим биш: тэнд ямагт байдаг;

13 дугаар зураг

$$A+I=I$$

Үнэндээ тодорхойлолт ёсоор I нь «хамгийн том» олонлог тул түүнийг цааш ихэсгэх боломжгүй. А олонлог ямар байлаач түүний нэгж I олонлог дээр нэмэхэд I олонлог өөрөө л гарна.

Цаашилбал

$$(a+b)c=ac+bc$$

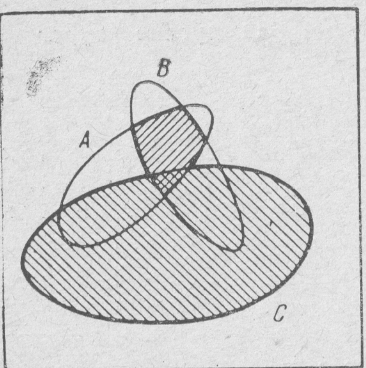
хаалт нээх хуульд нийлбэрийг үржвэрээр, үржвэрийг нийлбэрээр соливол $ab+c=(a+c)(b+c)$ гэсэн тооны хувьд бараг ихэнх тохиолд хүчингүй байх утгагүй тэнцэтгэлд» хүрнэ. Гэтэл олонлогийн алгебрт иим биш: Ямарваа A,B,C гурван олонлогийн хувьд

$$AB+C=(A+C)(B+C)$$

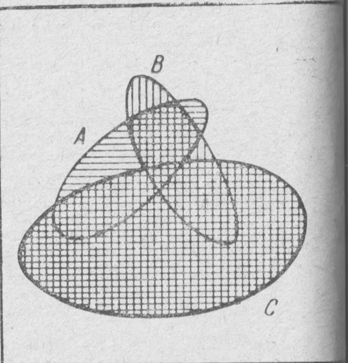
гэсэн хаалт нээх хоёрдугаар хуулийг (нэмэх үйлдлийн үржих үйлдэлд хаалт нээх хууль) илэрхийлсэн тэнцэтгэл хүчинтэй байна. Үнэндээ A-шатарчдын, B-даамчдын, C-усанд сэлэгчдийн (танай ангийн) олонлог бол AB нь шатар, даам хоёр тоглодог сурагчдын олонлог, $AB+C$ нь шатар ба даам хоёрын хоёуланг тоглодог сурагчид буюу сэлж чаддаг сурагчдаас тогтох олонлог болно. $A+C$ нь шатарч буюу сэлэгчдээс, $B+C$ нь даамч буюу сэлэгчдээс тогтох олонлог тул $(A+C)(B+C)$ нь сэлэгч буюу эсвэл шатар даам хоёрыг хоёу-

ланг тоглодог сурагчдаас тогтох олонлог болно, өө рөөр хэлбэл $AB+C$ олонлогтой давхцав.

Хаалт нээх хоёрдугаар хуулийг үгээр ингэж тайл барлах будлиантай юм шиг санагдаж болох тул түүний график зураглалаар тайлбарлая. 14 а дүгээр зураг дээ AB олонлог нь баруун тийш налсан шугамаар C нь зүү тийш налсан шугамаар зураасла гджээ. Тэгвэл энэ зу раг дээрх бүх зураасла гдсан дүрс нь $AB+C$ олонло гийг дүрслэнэ. 14 б дүгээр зураг дээр $A+C$ нь хэвтэ шугамаар $B+C$ нь босоо шугамаар зураасла гджээ Тэгвэл энэ зураг дээр «торлогдсон» дүрс нь $(A+C$



а)



б)

14 дүгээр зураг

$(B+C)$ олонлог болно. Гэтэл энэ дүрс нь 14 а зура дээрх бүх зураасла гдсан дүрстэй давхцах нь шууд ха рагдаж байна, үгээр хаалт нээх хоёрдугаар хууль бат лагдав.

Дунд сургуульд үздэг ердийн алгебрт биелдэггү олонлогийн алгебрийн 2 хуулийг эцэст нь авч үзье. нь ямарч олонлог байлаа гэсэн энэ олонлогийг өөрий нь өөртэй нь нийлүүлсэн нэгдэл ба мөн өөрийг нь өөр нь огтлолцуулсан огтлолцоо өөртэй нь л давхцана.

$$A+A=A \text{ ба } AA=A$$

байх нь илэрхий. Энэ хоёр тэнцэтгэлийг заримдаа *идем потент* хууль гэж нэрлэдэг.

Янз бүрийн тоонуудад алгебрийн ерөнхий хуулиуд байдаг нь тун таатай хэрэг: үүний ачаар л бүхэл тоо ноос бутархайд шилжихдээ урьд мэдэж байсан зүйл дээрээ юм нэмж л сурч байснаас биш цоо шинээр су ралцах хэрэггүй байлаа. Харин тооноос олонлогт шил жихэд байдал өөр болж байна. Тооны алгебраас олон логийн алгебрт шилжихэд олонлогийн алгебрийн шинэ хууль гарч ирдэг тул түүнийг шинээр сурах хэрэг гар даг.[1]

Эдгээр шинэ хуулиудыг дурьдвал:

$$A+I=I$$

гэсэн нэгж олонлог I-ийн 1 тооноос эрс ялгаатайг то дорхойлох хууль

$$(A+C)\ (B+C)=AB+C$$

гэсэн олонлогийн алгебрт хаалт нээх хоёрдугаар маш өнөрмөц хууль. Энэ хуулиас $(A+D)(B+D)(C+D)=$ $[(A+D)(B+D)](C+D)=(AB+D)(C+D)=(AB)C+D=$ $ABC+D$ гэж гарч байна. Цаашилбал идемпотент хуулиас үндэслэн *олонлогийн алгебрт зэргийн илт гэгч ба коэффициент байхгүйг харж болно.* Үнэн ээ A ба n нь ямарч байсан.

[1] Чухамхүү энэ ялгаа нь олонлогийн нэмэх ба үржих (нэгдэл, огтлолцол) үйлдлийг ихэнх номуудад U ба ∩ тэмдгээр тэмдэглэх заатгаан болдог. Энэ номонд бид өөр алгебрийн системийг үзнэ, түүний «нэмэх» ба «үржих» үйлдэл олонлогийн алгебр дахь хууль ай яг адил байх болно, чухам иймээс бид зөвхөн олонлогийн онолд хэрэглэдэг U, ∩ тэмдгүүдээс ангижрах хэрэгтэй болов. Нөгөө та лаас авч үзэж буй алгебрууд нь сургуульд судалдаг алгебртэй төстэй байдгийг нь харгалзан нэмэх үржихийн бидний мэдэх тэмд гийг хэрэглэх болов. Олонлогийн онолын хуулиудыг түүний тэм дэглээр бичвэл:

$$A\cup B=B\cup A \text{ ба } A\cap B=B\cap A$$

байр солих хуулиуд

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \text{ ба } (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

бүлэглэх хуулиуд

$$A\cup O=A \text{ ба } A\cap J=A$$
$$A\cup J=J \text{ ба } A\cap O=O$$

тэг олонлог О ба нэгж олонлог I-ийн чанарууд

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C) \text{ ба } (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

хаалт нээх хуулиуд

$$A\cup A=A \text{ ба } A\cap A=A$$

идемпотент хуулиуд

$$\underbrace{A + A + \ldots + A}_{n} = A \text{ ба } A \cdot A \ldots A = A$$

байна. Үүнээс; $(A+B)(B+C)(C+A) = ABC + AAB + ACC + AAC + BBC + ABB + BCC + ABC = (ABC + ABC) + (AB + AB) + (AC + AC) + (BC + BC) = ABC + AB + AC + BC$

(Доорхи 6 дугаар дасгалтай жиш).

Дасгал

Дараахь тэнцлүүдийг батал. Хоосон олонлогийг ямагт O, нэгж олонлогийг I-ээр тэмдэглэнэ.

1. $(A+B)(A+C)(B+D)(C+D) = AD + BC$
2. $A(A+B) = A$
3. $AB + A = A$
4. $A(A+C)(B+C) = AB + AC$
5. $A(A+1)(B+O) = AB$
6. $(A+B)(B+C)(C+A) = AB + BC + AC$
7. $(A+B)(B+C)(C+D) = AC + BC + BD$
8. $(A+B)(A+1) + (A+B)(B+O) = A + B$
9. $(A+B)(B+1)(A+O) = A$
10. $(A+B+C)(B+C+D)(C+D+A) = AB + AD + BD + C$

Жишээ нь: $A(A+C)(B+C) = A[(A+C)(B+C)] = A(AB+C) = (AB+C)A =$

үржвэрийн бүлэглэх хууль; хаалт нээх II хууль; үржвэрийн байр солих хууль; хаалт нээх I хууль

$= (AB)A + CA = (AA)B + AC = AB + AC.$

үржвэрийн байр солих ба бүлэглэх хууль; үржвэрийн идемпотент хууль

2 §. Булийн алгебр

Олонлогийн алгебрийн өөрсдийн мэдэх бүх хуулиудыг цуглуулан бичвэл

$$A + B = B + A \text{ ба } AB = BA$$
байр солих хуулиуд

$$(A+B)+C = A+(B+C) \text{ ба } (AB)C = A(BC)$$
бүлэглэх хуулиуд

$$(A+B)C = AC + BC \text{ ба } AB + C = (A+C)(B+C)$$
хаалт нээх хуулиуд

$$A + A = A \text{ ба } AA = A$$
идемпотент хуулиуд

Түүнээс гадна, олонлогийн алгебрт O ба I гэсэн хоёр «онцгой» элемент (олонлог) бий:

$$A + O = A \text{ ба } AI = A$$
$$A + I = I \text{ ба } AO = O$$

Энэ хуулиуд (үйлдлийн дүрмүүд) нь тооны алгебрийн бидний мэдэх хуулиудтай төстэй боловч яг ижил биш. Олонлогийн алгебр нь бас л «алгебр», гэвч бидний урьд мэдэх алгебр биш, шинэ ер бусын алгебр юм.

Гэтэл ердийн тоон алгебр нь нэг биш олон «алгебр» юм: «натурал тоонуудын алгебр», «рационал тоонуудын алгебр», «бодит тооны алгебр» эсвэл «комплекс тооны алгебр» гэх мэт. Энэ бүх алгебр нь тоонуудаараа, мөн үйлдлүүдийн (нэмэх ба үржүүлэх) тодорхойлолтоороо ялгаатай байна. Гэвч үйлдлийн үндсэн чанарууд бүх тохиолдолд нэгэн адил байна.

Үүнтэй уялдан олонлогийн алгебрт мөн ийм байх болов уу гэсэн асуулт зүй ёсоор гарна. Өөрөөр хэлбэл ганцхан олонлогийн алгбер байх уу? эсвэл үйлдэл гүйцэтгэх элемент ба үйлдлийн тодорхойлолтоороо ялгагдах боловч эдгээр үйлдлийн чанар нь адилхан байх олон алгебр орших уу?

Олонлогийн алгебртэй адилхан (олонлогийн алгебрийн хуулиуд биелдэг) алгбер маш олон байна гэдгийг чи тааж байх болно. Энэ нь үнэндээ тийм юм, олонлогийн алгебр нь өөрөө маш олон янз юм: «танай ангийн сурагчдын олонлогийн алгебр» «москвагийн амьтны хүрээлэн дахь араатнуудын олонлогийн алгебр», «квадратын цэгүүдийн олонлогийн алгебр» (7—14 дүгээр зураг хар) «сургуулийн номын сан дахь номуудын олонлогийн алгебр» эсвэл «тэнгэрийн одкуудын олонлогийн алгебр». Гэвч үүнтэй төстэй чанаруудтай бүр өөр маягийн алгебр оршин байдаг. Тэднээс хэдийг дурдая. Доорхи жишээнүүдийг авч үзэхийн өмнө чи,

дараахь зүйлийг сайн эзэмшсэн байх ёстой. Тэр нь a, b ... юмсын (элементүүдийн) ямар нэг олонлог дээр нэмэх ба үржих үйлдлийг тодорхойлох гэсэн асуудал юм. Энэ нь дурын хоёр а, в юмст тэдгээрийн нийлбэр ба үржвэр гэгдэх c ба d юмсыг харгалзуулдаг дүрмийг зааж өгнө гэсэн үг.

$$c = a + b, \qquad d = ab$$

Олонлогийн алгебрийг тодорхойлдог үйлдлийн бүх хуулиуд биелэгдэж байхаар энэ дүрмүүдийг сонгож авна. Ямар учраас a ба b-ийн нийлбэр c-тэй тэнцүү вэ? гэж асуух эрх чамд байхгүй $a+b$ нийлбэрийг бид яг энэ c гэж тодорхойлно, тэгвэл тодорхойлолтын тухай хэн ч маргадаггүй шүүдээ. Заримдаа манай тодорхойлолтууд чамд аймшигтай юм шиг санагдаж болно. энэ ч аргагүй, шинэ дасаагүй юм бүхэн аймшигтай санагддаг, тэгвэл энэ тодорхойлолтууд чиний хувьд шинэ зүйл шүү дээ. Телевизор телефон мэтийн гайхамшигт юмст одоо чи гайхахгүй шүү дээ, учир нь чи тэдэнд аль хэдийнээ дассан. Харин a ба b натурал тооны нийлбэр гэдэг нь а юмстай олонлог ба b юмстай B олонлогийн нэгдэлд байх юмсын тоо, ab үржвэр гэдэг тус бүр нь b юмстай a ширхэг олонлогийн нэгдэлд байх юмсын тоо гэдгийг хатуу ойлгосон 2 юмуу 3 дугаар ангийн сурагчдад $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$ бутархайнуудын нийлбэр ба үржвэр нь

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}, \quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

гэж тодорхойлогддог болохыг тайлбарлахад тэдэнд аймшигтай санагдаж болно.

Манай жишээнүүд:

Жишээ 1. *Хоёр тооны алгебр*

Манай алгебрт зөвхөн хоёр элемент байна, тэднийг тоо гэж нэрлээд 0 ба 1 гэж тэмдэглэе (энд энэ тэмдгүүд нь тас өөр утгатай). Энэ тоонуудын үржвэрийг, ердийн арифметикт тодорхойлдог шиг дараахь «үржвэрийн хүрдээр» тодорхойлъё.

·	0	1
0	0	0
1	0	1

харин нэмэхийг «бараг ердийнхөөр», зөвхөн $1+1$ нийлбэр нь одоо 2-той (манай «хоёр тооны алгебрт» тийм тоо байхгүй шүү дээ) тэнцүү биш харин 1 гэж тодорхойлъё.

+	1	0
1	0	1
0	1	1

Ингэж тодорхойлогдсон алгебрт байр солих хоёр хууль хоёул биелнэ.

дурын a, b-ийн хувьд

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba$$

мөн дурын a, b, c элементийн хувьд

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ ба } (ab)c = a\,(bc)$$

гэсэн бүлэглэх хууль биелэхийг хялбархан шалгаж болно. энд үржвэрийн хувьд шалгахгүй байж ч болно, учир нь шинэ үржвэр нь бидний мэдэх үржвэртэй давхцаж байна.

(Дурын a-ийн хувьд

$$a + a = a \text{ ба } aa = a$$

гэсэн идемпотент хуулиудыг шалгаж болно. ($1+1=1$ гэж авсан шүү дээ).

Харин хаалт нээх хуулиудыг шалгахад жаахан төвөгтэй:

$$(1 + 1)\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1 \text{ ба } (1\cdot 1) + (1\cdot 1) = 1 + 1 = 1$$
$$(1\cdot 1) + 1 = 1 + 1 = 1 \text{ ба } (1 + 1)\cdot(1 + 1) = 1\cdot 1 = 1$$

Эцэст нь манай алгебрийн 0 элементийн үүргийг 0 тоо, I элементийн үүргийг 1 тоо гүйцэтгэнэ гэж үзвэл «онцгой» элемент O ба I-д харгалзах дүрмүүд биелнэ.

($a=0$ ба $a=1$ үед)

$a+0=a$ ба $a\cdot 1=a$ $\quad a+1=1$ ба $a\cdot 0=0$

Ж и ш э э 2. Дөрвөн тооны алгебр

Энэ нь 1 дүгээр жишээний төрлийн нэлээд төвөгтэй жишээ юм. Алгебрийн элементүүд нь 0 ба 1 цифр ба p ба q хоёр үсгээр тэмдэглэсэн 4 «тоо» байна гэе. Авч үзэж буй алгебрд нэмэх ба үржих үйлдлийг дараахь хүснэгтээр тодорхойлно.

+	0	p	q	1
0	0	p	q	1
p	p	p	1	1
q	q	1	q	1
1	1	1	1	1

·	0	p	q	1
0	0	0	0	0
p	0	p	0	p
q	0	0	q	q
1	0	p	q	1

Шууд шалгах замаар дурын a, b, c элементийн хувьд:

$$a+b=b+a,\ ab=ba,\ a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$(ab)\ c=a\ (bc), (a+b)\ c=ac+bc,\ ab+c=(a+c)(b+c);$$
$$a+a=a,\ aa=a$$

болохыг харж болно.

Түүнээс гадна олонлогийн алгебрийн O ба J элементүүдийн үүргийг 0 ба 1 тоонууд гүйцэтгэж байна, учир нь дурын a элементийн хувьд

$$a+0=a \text{ ба } a\cdot 1=a,\quad a+1=1 \text{ ба } a\cdot 0=0$$

Ж и ш э э 3. *Максимум ба минимумын (хамгийн их ба бага утгын, алгебр*

Тооны ямар нэг (заагладсан) олонлог, жишээлбэл $0\leqslant x\leqslant 1$ байх x-тоонуудын (бүгдийг нь ч авч болно) олонлогийг алгебрынхаа элементүүд болгоё. Эдгээр тооны (элементийн) нэмэх, үржих үйлдлийг цоо шинэ аргаар тодорхойльё. Энэ үйлдлээ ердийн нэмэх ба үржих үйлдэлтэй хутгахгүйн тулд $\oplus$ нэмэх ба $\odot$ үржих тэмдгүүдээр тэмдэглэе. x, y тооны *нийлбэр* гэж $x\oplus$ y нь энэ хоёр тооны аль ихийг нь тэнцүү ($x=y$ бол аль нь ч байж болно.) x ба y тооны үржвэр $x\oplus y$ нь энэ хоёр тооны аль багатай нь тэнцүү ($x=y$ бол аль нь ч байж болно).

Тухайлбал 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1 тоонууд манай алгебрын элемент болж байвал эдгээр тооны хувьд нэмэхийн үржих үйлдлийн «таблиц» нь:

$\oplus$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
1	1	1	1	1	1

$\otimes$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

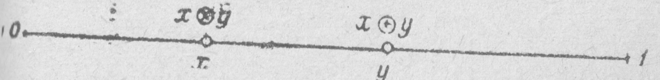
байдалтай болно.

Математикт $u, v, \ldots, z$ тоонуудын хамгийн ихийг max $]u, v, \ldots, z]$) maximum-хамгийн их гэсэн латин үг) гэж ихэвчлэн тэмдэглэдэг, харин энэ тоонуудын хамгийн багыг min $]u, v, \ldots, z]$ (mimimum-хамгийн бага гэсэн латин үг) гэж тэмдэглэдэг[1]. Ийнхүү манай алгебрт тодорхойлолт ёсоор

$$x\oplus y=\max\,[x,\ y] \text{ ба } x\otimes y=\min[x,\ y]$$

боллоо.

Тоонуудаа бас тоон шулууны цэгүүдээр тэмдэглэж болно, тэгвэл $0\leqslant x\leqslant 1$ байх x тоонууд нь 1 урттай хэрчмийн цэгүүдээр дүрслэгдэнэ. Харин x, y



15 дугаар зураг.

[1] max $[u, v, \ldots, z]$ ба min $[u, v, \ldots, z]$-үүдийг харгалзан «$u, v, \ldots, z$-ийн хамгийн их» ба «$u, v, \ldots, z$-ийн хамгийн бага» гэж уншина.

тооны нийлбэр $x \oplus y$ нь x ба y цэгийн баруунаар, үрж вэр $x \otimes y$ нь зүүнээр дүрслэгдэнэ (15 дугаар зураг).

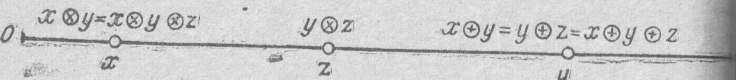
Бидний шинээр тодорхойлсон нэмэх, үржих хоё үйлдэл нь байр солих хуулийг хангах нь ойлгомжто бизээ.

$$x \oplus y = y \oplus x \text{ ба } x \otimes y = y \otimes x$$

Бас бүлэглэх хуулиуд биелэх нь илт:

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \text{ ба } (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

учир нь $(x \oplus y) \oplus z$ буюу $x \oplus (y \oplus z)$ тоо нь max $[x, y, z]$ (түүнийг $x \oplus y \oplus z$ гэж бичиж байя), харин $(x \odot y) \odot$ буюу $x \otimes (y \otimes z)$ тоо нь min $[x, y, z]$ (мөн үүний $x \otimes y \otimes z$ гэж бичиж байя) билээ. (16 дугаар зураг).



16 дугаар зураг.

Идемпотент хуулиуд биелэх нь илэрхий:

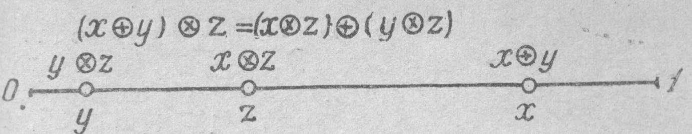
$$x \oplus x = \max[x, x] = x \text{ ба } x \odot x = \min[x, x] = x$$

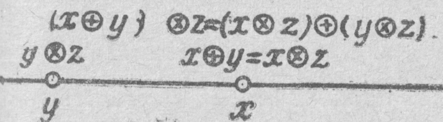
Эцэст нь хаалт нээх хуулиудыг шалгая:

$$(x + y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (x \otimes z)$$
$$(x \otimes y \oplus z = (x \oplus z) \otimes (y \oplus z)$$
$$(x \oplus y) \otimes z = \min \{\max[x, y], z\}$$

тоо нь хэрэв x ба y тооны ядаж нэг нь z тооноос бол z-тэй тэнцүү, хэрэв x ба y нь хоёул z-ээс бага б энэ хоёрын аль ихтэй нь тэнцүү юм (Зураг 13 а Гэтэл яг энэ тоотой $(x \otimes z) \oplus (y \otimes z) = \max\{\min[x, z], \min[z]\}$ тоо тэнцүү юм (17 дугаар зураг). Яг үүний адил $(x \otimes y) \oplus z = \max\{\min[x, y], z\}$ тоо нь хэрэв x ба y тоо ядаж нэг нь z-ээс бага бол z-тэй тэнцүү, хэрэв хоё z-ээс их бол x ба y-ийн аль багатай нь тэнцүү (3 раг 14 а, б).

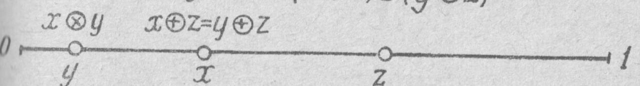
Гэтэл $(x \oplus z) \otimes (y \oplus z) = \min\{\max[x, z], \max[3,$ тоо нь яг энэ тоотой тэнцүү (18 дугаар зураг).

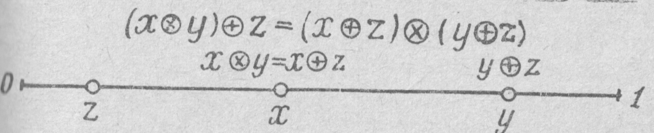




17 дугаар зураг

Тэгвэл одоо манай энэхүү өвөрмөц алгебрт олонлогийн алгебрийн бүх хууль биелнэ гэдэгт үнэмшихийн тулд олонлогийн алгебрийн 0 ба I элементүүдийн үүргийг, бидний авч үзэж буй тоонуудын хамгийн бага нь болох 0 ба хамгийн их нь болох 1 гүйцэтгэнэ гэдгийг





18 дугаар зураг.

тэмдэглэхэд хангалттай. Үнэндээ $0 \leqslant x \leqslant 1$ байх ямар ч x тооны хувьд:

$$x \oplus 0 = \max[x, 0] = x \text{ ба } x \otimes 1 = \min[x, 1] = x$$
$$x \oplus 1 = \max[x, 1] = 1 \text{ ба } x \otimes 0 = \min[x, 0] = 0$$

Жишээ 4. *Хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчийн алгебр*

Дурын натурал тоог N гэе. Манай шинэ алгебры элементүүд болгож N тооны бүх хуваагчдыг авъя. Жишээ нь $N = 210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7$ байвал манай алгебрын эл ментүүд нь 1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 15 21, 30, 35, 42, 7(105, 210 болно.

Эдгээр тооны нэмэх үржих үйлдлийг бүр цоо ш нээр тодорхойлъё. m, n хоёр *тооны нийлбэр* $m \oplus$ гэж эдгээрийн хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчи (давталтыг) өөрөөр хэлбэл m, n хоёр тус бүрд хуваагд даг хамгийн бага натурал тоог харин m, n хоёр *тоон үржвэр* $m \otimes n$ гэж эдгээрийн хамгийн их ерөнхий ху ваагчийг тодруулбал m-ийг r n-ийг r хуваадаг хамги их натурал тоог хэлнэ. Жишээ нь $N = 6$ бол мана алгебр 1, 2, 3 ба 6 тоонуудыг агуулна, эдгээрийн н мэх, үржих үйлдлийн таблиц:

$\oplus$	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

$\otimes$	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

„Дээд арифметикт" (тооны онол) m, n, ... S то нуудын хамгийн бага ерөнхий давталтыг $[m, n, ..., S$ ба хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $(m, n, \dots, S)$ гэ тэмдэглэдэг. Тэгвэл тодорхойлолт ёсоор манай алгеб $m \oplus n = [m, n]$ ба $m \otimes n = (n, n)$

Жишээ нь 10 ба 15-ийг алгебр агуулдаг бол 10 $\oplus 15 = [10, 15] = 30$ ба $10 \otimes 15 = (10, 15) = 5$

Манай алгебрт ямагт $m \oplus n = n \oplus m$ ба $m \otimes n = n \otimes$ байна.

Цаашилбал $(m \oplus n) \oplus p = m \oplus (n \oplus p)$ $(= [m, n, p$ (энэ тоог $m \oplus n \oplus p$ гэж тэмдэглэж байя). ба $(m \odot n)$ $\otimes p = m \otimes n \otimes p) (= (m, n, p))$
(энэ тоог $m \otimes n \otimes p$ гэж тэмдэглэж байя).

Идемпотент хуулиуд бас илэрхий:

$$m \oplus m = [m, m] = m \text{ ба } m \otimes m = (m, m) = m$$

Хаалт нээх хуулийг шалгахад л жаахан төвөгтэ

$$(m \oplus n) \otimes p = ([m, n], p)$$

тоо нь m, n тооны хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч ба p тооны хамгийн их ерөнхий хуваагч билээ. (үүнийг сайн бодоорой). Энэ тоо нь m ба n тооны аль нэгний нь задаргаанд ордог p тооны задаргааны үржигдхүүнүүдийг л агуулна. Гэтэл эдгээр анхны үржигдхүүнүүд нь

$$(m \otimes p) \oplus (n \otimes p) = [(m, p), (n, p)]$$

тооны задаргаанд орох тул

$$(m \oplus n) \otimes p = (m \otimes p) \oplus (n \otimes p)$$

болно. Тухайлбал 210 тооны хуваагчдаас авбал

$$(10 \oplus 14) \otimes 105 = ([10, 14], 105) = (70, 105) = 35 \text{ ба}$$
$$(10 \otimes 105) \oplus (14 \otimes 105) = [(10, 105), (14, 105)] = [5, 7] = 35$$

Үүний адилаар $(m \otimes n) \oplus p = [(m, n), p]$
тоо нь m, n тооны хамгийн их ерөнхий хуваагч ба p тооны хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч билээ, энэ тоо нь эсвэл p-д ордог эсвэл m ба n-д ордог зөвхөн тийм анхны үржигдхүүнүүдийг л агуулна. Гэтэл яг энэ үржигдхүүнийг

$$(m \oplus p) \otimes (n \otimes p) = ([m, p], [n, p])$$

тоо агуулна, иймд ямагт

$$(m \otimes n) \oplus p = (m \oplus p) \otimes (n \oplus p)$$

байна.

Жишээ нь: $(10 \otimes 14) \oplus 15 = [(10, 14), 105] = [2, 105] =$
$= 210$ ба $(10 \oplus 105) \otimes (14 \otimes 105) = ([10, 105], [14, 105]) =$
$= (210, 210) = 210$

Эцэст нь олочлогийн энэ алгебрийн 0 ба I элементүүдийн үүргийг өмнөх тоонуудын хамгийн бага нь болох 1 ба хамгийн их нь болох N гүйцэтгэж байна. Үнэндээ

$$m \oplus 1 = [m, 1] = m \text{ ба } m \otimes N = (m, N) = m$$
$$m \oplus N = [m, N] = N \text{ ба } m \otimes 1 = (m, 1) = 1$$

биелэх нь илт (манай алгебрт N тооны л хуваагчид орохыг бүү март).

Ийнхүү энд олонлогийн алгебрийн бүх хууль биеллээ.

Бид үгээр олонлогийн алгебрын бүх хуулиуд биелж байхаар нэмэх ба үржих үйлдлийг тодорхойлж болох „юмсын“ олон янзын систем оршин байхыг үзлээ.

Хойно бид тийм алгебрийн тун сонирхолтой чухал хоёр жишээ үзнэ.

Тийм бүх алгебрын ерөнхий чанарыг судлахад шилжихийн тулд тэдгээрт ямар нэг ерөнхий нэр өгөх хэрэгтэй. Хачин сонирхолтой шинж чанар бухий энэ алгебруудыг анх XIX зууны үед английн гайхамшигт математикч Джордж Б у л ь[1] авч үзсэн болохоор одоо үед тэдгээрийг *Булийн алгебр*[2] гэж нэрлэдэг юм.

Булийн алгебрийн үндсэн үйлдлүүдийн хувьд „нэмэх“ ба „үржих“ нэрийг хэвээр нь хадгалая (гэвч энэ нь тооны ердийн нэмэх ба үржих үйлдэл огт биш гэдгийг санаж явах хэрэгтэй). Гэхдээ цаашид бид заримдаа энэ хоёр үйлдлийг *булийн нэмэх булийн үржих* үйлдэл гэж нэрлэнэ. Гарын авлага зориулж буй энэ ер бусын алгебрын талаар дэлгэрэнгүй судалсан Дж. Булийн бүтээл нь анх 1854 онд өөрөөр хэлбэл одоогоос 100 гаруй жилийн өмнө гарчээ. Энэ бүтээл нь „Сэтгэхүйн хуулиудын шинжилгээ“ («investigation of the laws of thought») гэдэг нэртэй байжээ.

Одоохондоо энэ нэр чамд сонин санагдаж магадгүй, гэвч энэ номыг уншаад энд авч үзэж буй гайхамшигт алгебрууд нь манай сэтгэхүйн хуулиудтай ямар холбоотой байгааг ойлгох болно.

Хэдийгээр Булийн бүтээлийг анхандаа математикчид бага анхаардаг байсан боловч, одоо үед түүнийг их сонирхох болсон нь Булийн алгебр „сэтгэхүйн хуулиудтай“ холбоотой байдагт л оршиж байгаа юм. Сүүлийн жилүүдэд энэ бүтээл янз бүрийн улсад олон дахин орчуулагдаж, олон дахин хэвлэгдэж байна. Булийн алгебр гэдэг ойлголтыг нэлээд олон улс ямар нэг хэлбэрээр сургуулийн математикийн программдаа хэдийн оруулжээ. Харин бусад оронд, тухайлбал ЗХУ-д энэ ойлголтыг дунд сургуулийн программд оруулах асуудлыг одоо идэвхтэй хэлцэж байгаа ба математикчид болоод сурган хүмүүжүүлэгчдийн дотроос энэ асуудлыг халуунаар дэмжигчид цөөнгүй болжээ[1].

---

[1] Овод романы зохиогч английн алдарт зохиолч эмэгтэй Этель Лиллиан Булийн эцэг (Войнич Овгоор алдаршсан польшийн хувьсгалч М. Войнич-түүний нөхөд).

[2] Булийн алгебрын нарийн тодорхойлолт хавсралтанд бий.

Дасгалууд

1. „2 тооноос тогтсон Булийн алгебрийн“ ямарч гурван элементийн хувьд хаалт нээх хууль хоёулаа биелэхийг шууд шалга. (64 дүгээр хуудас жишээ 1).

2. „4 тооноос тогтсон Булийн алгебрийн“ хэд хэдэн гуравтуудын хувьд хаалт нээх хууль хоёулаа биелэхийг шалга. (... дугаар хуудас жишээ 2).

3. а) Танай байранд чамаас өөр сурагч байхгүй бол „танай байрны сурагчдын бүх олонлог“ гэвэл: нэг сурагчаас тогтсон олонлог ба нэгч сурагчийг агуулаагүй 0 олонлог (хоосон олонлог) хоёр л юм. „Танай байранд суудаг сурагчдын олонлогийн алгебр“-ын хувьд (энэ алгебр нь *I* ба 0 гэсэн 2 элементтэй) „нэмэх“ „үржих“ үйлдлийн таблиц зохиож түүнээ 1 дүгээр жишээний таблицтай жиш. 1 дүгээр жишээний хувьд Булийн алгебрийн бүх хууль биелэхийг эндээс гарга.

б) Нэг байранд Петя ба Катя хоёр суудаг гэе. Тэгвэл „энэ байранд суудаг сурагчдын олонлогийн алгебр“ нь 4 элемент агуулна: *I* олонлог хоёр сурагчаас, тус бүр нэг сурагчаас тогтох *П* (Петя) ба *К* (Катя) гэсэн 2 олонлог, 0 хоосон олонлог болно. Олонлогуудын энэ алгебрын хувьд „нэмэх“ ба „үржих“ үйлдлийн таблицыг зохиож түүнийгээ энэ зүйлийн 2 дугаар жишээний таблицтай жишиж, эндээсээ 2 дугаар жишээний «дөрвөн тооны алгебрын» хувьд Булийн алгебрийн бүх хуулиуд биелэхийг гарга.

4. а) $\min\left\{\max\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right], \frac{1}{4}\right\} = \max\left\{\min\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right],\right.$

$$\left.\min\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]\right\} \text{ ба } \max\left\{\min\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right], \frac{1}{4}\right\} = \min\left\{\max\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right],\right.$$

$$\left.\max\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]\right\} \odot$$

б) $([12,30], 8) = [(12,8), (30,8)]$ ба $[(12,30),8] = ([12,8], [30,8]$ болохыг шалга.

5. а) 0, $\frac{1}{2}$, 1 тооноос бүрдсэн $x \oplus y = \max[x, y]$ ба $x \odot y = \min[x, y]$ үйлдэлтэй Булийн алгебрийн „нэмэх“ ба „үржих“ үйлдлийн таблиц зохиож Булийн алгебрийн бүх хуулиуд биелэхийг шалга.

б) $m \oplus n = [m, n]$ ба $m \otimes n = (m, n)$

үйлдэлтэй 12-ын хуваагчдын алгебрийн хувьд „нэмэх“ ба „үржих“-ийн таблиц зохио. Энд Булийн алгебрийн зарим хууль биелэхийг шалга.

---

[1] Энэ ном 1968 онд хэвлэгдсэнийг сана. (хэв. ред.)

6.* Натурал тоо N-ийг анхны үржигдхүүнд задалсан задарга $N = p_1^{A_1} p^{A_2} \ldots p_k^{A_k}$ боло. N тооны дурын хоёр хуваагч ба n-ийг

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, \text{ үүнд } 0 \leqslant a_1 \leqslant A_1 \ldots, o \leqslant a_2 \leqslant A_2 \ldots$$
$$o \leqslant a_k \leqslant A_k$$
$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k} \text{ үүнд } 0 \leqslant b_1 \leqslant A_1, \ldots o \leqslant b_2 \leqslant A_2,$$
$$o \leqslant b_k \leqslant A_k$$

гэж бичиж болно. Тэгвэл $[m, n]$ ба (m, n) тоог анхны үржигдхүү нүүдээр задалсан задаргаа ямар холбоотой байх вэ? Энэ задарга гаа ашиглан N тооны бүх хуваагчдын олонлог нь $m \oplus n = [m, n]$ ба $m \odot n = (m, n)$ үйлдэлтэй Булийн алгебр үүсгэхийг батал.

3§ Булийн алгебрын цаашдын чанар, хоёрлох зарчим, Булийн тэнцэтгэл ба тэнцэтгэл биш үүд

Булийн алгебр гэж нэрлэсэн ер бусын алгебры судалгааг үргэлжлүүлье. Булийн нэмэх ба булийн үр жих үйлдлийн чанарууд тун ч төстэй байдаг нь нүдэнд шууд тусаж байна. *Булийн алгебрын ямарч (мэ дээж зөв) томьёонд нэмэхийг үржихээр мөн үр вуугаар үржихийг нэмэхээр сольж болно,* тэгэхэд тэнцэтгэл хүчинтэй хэвээр байна. Жишээ нь; Булийн алгебрт

$$A(A+C)(B+C) = AB + AC$$

тэнцэтгэл биелнэ. Энд нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр соливол

$$A + AC + BC = (A+B)(A+C)$$

гэсэн хүчин төгөлдөр тэнцэтгэлд хүрнэ (үүнийг хойно батална). *Харин Булийн алгебрийн тэнцэтгэлд О ба I гэсэн „онцгой“ элемент оролцож байвал үйлдлийг солихын сацуу 0 элементийг I-ээр I элементийг 0-ээр тус тус бас солих хэрэгтэй.*

Жишээ нь: $(A+B)(A+I) + (A+B)(B+O) = A+I$ тэнцэтгэлээс $(AB+AO)(AB+BO) = AB$ гэж гарна.

Ямарваа тэнцэтгэлээс „үнэгүй“ (батлахгүй) шинэ[1] тэнцэтгэлийг гаргах Булийн алгебрийн энэ чанарыг *хоёрлох зарчим* гэж нэрлэх ба энэ зарчмаар бие биеэсээ гарч байгаа тэнцэтгэлүүдийг бие биедээ хоёрломол тэнцэтгэлүүд гэнэ. Бид Булийн ямар нэг томьёог батлахдаа түшиглэх Булийн алгебрийн үндсэн хуулиуд нь тун ч „тэгш хэмтэй“ гэдгээс л хоёрлох зарчим гарч байна.

Жишээ нь нэмэхийн байр солих хуульд үржихийн байр солих хууль хоёрломол нэмэхийн бүлэглэх хуульд үржихийн бүлэглэх хууль, нэмэхийн идемпотент хуульд үржихийн идемпотент хууль, хаалт нээх 1 дүгээр хуульд хаалт нээх 2 дугаар хууль тус тус хоёрломол юм. Эцэст нь

$$A + O = A \text{ ба } A + I = I$$

тэнцлүүдэд

$$AI = A \text{ ба } AO = O$$

тэнцлүүд хоёрломол юм.

Иймд бид булийн алгебрийн үндсэн хуулиудыг ашиглан ямар нэг тэнцэтгэлийг баталсан бол, тэдгээр ашигласан хуулиудад хоёрлох тэнцэтгэлүүдийг ашиглан саяын баталсан тэнцэтгэлд хоёрлох тэнцэтгэлийг мөн баталж чадна.

Жишээ. $(A(A+C)(B+C) = AB + AC$ тэнцэтгэлд хоёрломол $A + AC + BC = (A+B)(A+C)$ тэнцэтгэлийг батлая. Үнэхээр $A + AC + BC = A + (AC + BC) = A + (A+B)C = (A+B)C +$
(нэмэхийн бүлэглэх хууль; хаалт нээх 1 дүгээр хууль; нэмэхийн байр солих хууль)

[1] Булийн алгебрийн ямар нэг томьёоноос хоёрломлын зарчмаар гарсан „шинэ“ томьёо анхны томьёотой давхцаж ч болно.

$$(A+B)(B+C)(C+A) = AB + AC + BC\text{-ийн}$$

нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр солиход

$AB + AC + BC = (A+B)(B+C)(A+C)$ түүнтэй тэнцэтгэлд шилжинэ.
(1§-ийн дасгал 6). Харин $(A+B)(B+C)(C+D) = AC+BC+BD$

нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр солиход үүнээс ялгүй өөр $AB + BC + CD = (A+C)(B+C)(B+D)$ тэнцэтгэлд шилжинэ. Гэтэл энд (B-г C-ээр C-г B-ээр соливол анхны тэнцэтгэл гарна)·

$+A=[(A+B)+A]\ (C+A)=[(A+A)+B]\ (A+C)=(A+B)\ (A+C)$

хаалт нээх II хууль; нэмэхийн байр солих ба бүлэглэх хууль; нэмэхийн идемпотент хууль

(1§-ийн 4 дүгээр дасгалын бодолттой жиш!)

Булийн алгебрийн онцгой үйлдэлттэй уялдаатай хоёрлох зарчмын өөр нэг баталгаа байдаг. Энэ үйлдэл нь: Булийн алгебрын элемент A бүрийг өөр шинэ A элементэд шилжүүлдэг энэ үйлдлийг «зураас» үйлдэл гэж нэрлэе. Харин энэ үйлдлийг хэрэглэх бүрдээ нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр өөрөөр хэлбэл

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \text{ ба } \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

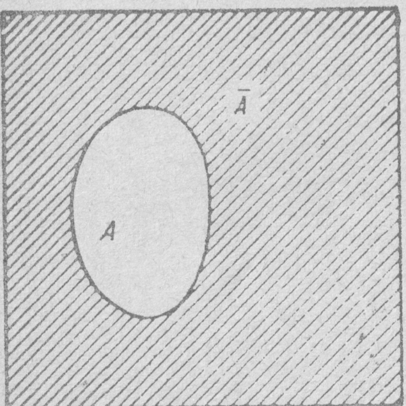
солино. Цаашилбал

$$\overline{O}=I \text{ ба } \overline{I}=O$$

$\overline{A}$ элементийн „Зураас" үйлдэл нь түүнийг анхны A элементэд аваачна. Өөрөөр хэлбэл

$$\overline{\overline{A}}=\overline{(\overline{A})}=A$$

Олонлогийн алгебрт „зураас" үйлдэл нь (энэ өвөрмөц үйлдэл нь нэмэх үйлдэл шиг хоёр элементээс шинэ элемент үүсгэдэггүй, харин ганц элементээс үүсгэдэг) дараахь утгатай байна. Үүнд: A олонлогийн *гүйцээлтийг* $\overline{A}$ гэж үзнэ, өөрөөр хэлбэл $\overline{A}$ *нь универсал I олонлогийн A дэд олонлогт ордоггүй зөвхөн тийм элментүүдээс тогтоно.* Жишээ нь универсал олонлог болгож танай ангийн бүх сурагчдын олонлогийг авбал, A нь 1 дүгээр улиралд нэг муу дүн авсан сурагчдын олонлог гэвэл $\overline{A}$ нь ганц ч удаа муу дүн аваагүй сурагчдын олонлог болно.



19 дүгээр зураг.

A олонлогийн гүйцээлтийн тодорхойлолтоос

$$\overline{\overline{A}}=\overline{(\overline{A})}=A \text{ ба } A+\overline{A}=I,\ \overline{A}A=O$$

гэж гарна. (19 дүгээр зураг хар); Сүүлчийн 2 тэнцэтгэлийг $\overline{A}$ олонлогийн тодорхойлолт болгож авч болно).

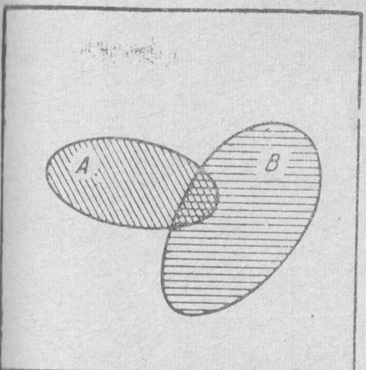
$$\overline{O}=I \text{ ба } \overline{I}=O$$

байх нь бас илэрхий.

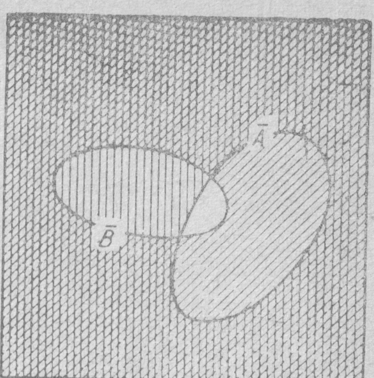
Эцэст нь де Морганы дүрэм нэртэй олонлогийн алгебрт биелэх „зураас" үйлдлийн

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \text{ ба } \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

гэсэн чухал чанарыг батлая.



a)



б)

20 дугаар зураг.

20 а зураг дээр зүүн тийш хазайлттай шугамаар A (дүрс) олонлог, 20 б зураг дээр бүтэн квадрат I хүртэлх түүний гүйцээлт $\overline{A}$-г баруун тийш хазайлттай шугамаар 20 а зураг дээр хэвтээ шугамаар B олонлог (дүрс) 20 б зураг дээр босоо шугамаар түүний гүйцээлт $\overline{B}$-г зураасалжээ.

Тэгвэл $A+B$ нь 20 а зураг дээрх зураасла́гдсан олонлог, $\overline{AB}$ нь 20 б зураг дээрх хоёр удаа давхар зурааслагдсан (торлогдсон) олонлог болно. 20 а 20 б зургийг харьцуулбал 20 б дээрх давхар зурааслагдсан дүрс нь 16 а дээрх зураас лагдсан дүрсийн гүйцээлт байна, энэ нь $\overline{A+B}=\overline{AB}$ гэсэн де Морганы 1 дүгээр дүрмийг баталж байна. Нөгөө талаас 20 а дээр AB (A,B олонлогийн огтлолцоо) давхар зурааслажээ. Харин 20 б дээр $\overline{A}+\overline{B}$ нь бүх зураасласан хэсэг. Иймд энэ 2 олонлог нь бие биеийн гүйцээлт болох нь харагдаж байна, өөрөөр хэлбэл

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

Одоо „зураас“ үйлдлийн утгыг Булийн алгебрийн дээр үзсэн жишээнүүдийн хувьд сонирхоё. Хоёр тооны алгебрт (2§-ийн жишээ)

$$\overline{0}=1 \text{ ба } \overline{1}=0$$

гэвэл энэ алгебрийн дурын a элементийн хувьд $\overline{\overline{a}}=a$ байх нь илэрхий. Цаашилбал $\overline{0}=1$ ба $\overline{1}=0$ тоонуудын „үржихийн таблиц ба“ «нэмэхийн таблицийг»

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	$\overline{0}=1$	$\overline{1}=0$
$\overline{0}=1$	1	0
$\overline{1}=0$	0	0

харьцуулж харвал ямар тохиолдолд $\overline{a+b}=\overline{a}\ \overline{b}$ гэж гарна. Үүний адилаар де Морганы 2 дугаар дүрмийг шалгана.

Дөрвөн тооны алгебрт (2§-ийн 2 дугаар жишээ)

$$\overline{0}=1\ \overline{p}=q,\ \overline{q}=p,\ \overline{1}=0$$

гэж авбал дахиад л дурын a-гийн хувьд $\overline{\overline{a}}=a$ байх нь илэрхий! $\overline{a+b}=\overline{a}\ \overline{b}$ тэнцэтгэлийг шалгахын тулд

+	0	p	q	1
0	0	p	q	1
p	p	p	1	1
q	q	1	q	1
1	1	1	1	1

·	$\overline{0}=1$	$\overline{p}=q$	$\overline{q}=p$	$\overline{1}=0$
$\overline{0}=1$	1	q	p	0
$\overline{p}=q$	q	q	0	0
$\overline{q}=0$	p	0	p	0
$\overline{1}=0$	0	0	0	0

...ас хоёр таблицыг жишвэл хангалттай.

Үүний адил $\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$ шалгана. Одоо максимум ба ...нимум алгебрт шилжие. Энэ алгебрийн элементүүд нь $0\leqslant \overline{\overline{x}} \leqslant 1$ ба́х x тоонууд ба булийн нэмэх $\oplus$ ба булийн үржих $\odot$ (буюу $\otimes$) үйлдлүүд нь

$$x\oplus y=\max\ [x,\ y] \text{ ба } x\odot y=\min\ [x,\ y]$$

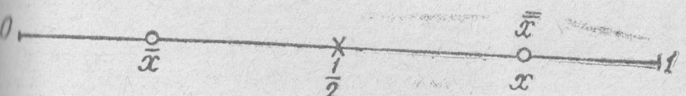
...эж тодорхойлогддог билээ. Энэ алгебрт

$$\overline{x\oplus y}=\overline{x}\odot\overline{y} \quad \overline{x\odot y}=\overline{x}\oplus\overline{y}$$

...эсэн де Морганы хоёр дүрэм өөрөөр хэлбэл $\overline{\max\ [x.\ y]}=\overline{\min\ [x,\ y]}=\max\ [\overline{x},\ \overline{y}]$ биелэхийн тулд „зураас“ үйлдэл элементүүдийн эрэмбийг л урвуулдаг байх, өөрөөр хэлбэл $x\leqslant y$ гэдгээс $\overline{y}\leqslant\overline{x}$ гэж гардаг байх хэрэгтэй (яагаад?) Иймд хэрэв $0\leqslant x\leqslant 1$ байх бүх x тоонууд нь манай алгебрийн элементүүд гэвэл

$$\overline{x}=1-x$$

...эж авч болно, өөрөөр хэлбэл $\overline{x}$ цэг нь $[0,\ 1]$ хэрчмийн дундач ...ийн хувьд x цэгт тэгш хэмтэй байна гэж үзэж болно.



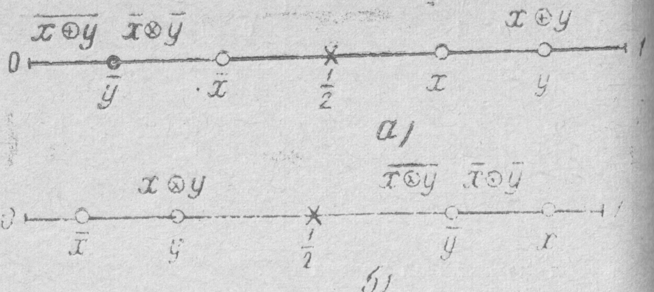
21 дүгээр зураг.

...1 дүгээр зураг). Тийм үед

$$\overline{0}=1,\ \overline{1}=0 \text{ ба } \overline{\overline{x}}=x \text{ байх нь илэрхий.}$$

$$\overline{x\oplus y}=\overline{x}\odot\overline{y},\ \overline{x\odot y}=\overline{x}\oplus\overline{y}$$

...эсэн де Морганы дүрэм биелэх нь илэрхий (22 а, б зураг).



22 дугаар зураг.

Эцэст нь хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчдын алгебрыг авч үзье. N тооны хуваагчид нь ... алгебрын элементүүд болох ба булийн нэмэх $\oplus$ ба булийн үржих ...

үйлдлүүд нь $m \oplus n = [m, n]$, $m \odot n = (m, n)$

энд $[m, n]$ нь m ба n хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч, харин (m, n) нь тэдгээрийн хамгийн их ерөнхий хуваагч болно.

$$\overline{m} = \frac{N}{m}$$

гэж авна гэвэл $N = 210$ тохиолдолд

$$\overline{1} = 210,\ \overline{2} = 105,\ \overline{3} = 70\ \ \overline{5} = 42,\ \overline{6} = 35,\ \overline{7} = 30,\ \ \overline{10} = 21$$
$$\overline{14} = 15\ \overline{15} = 14,\ \ \overline{21} = 10,\ \overline{30} = 7,\ \overline{35} = 6,\ \overline{42} = 5,\ \overline{70} = 3$$
$$\overline{105} = 2,\ \overline{210} = 1$$

болно. Энэ үед $\overline{1} = N$ ба $\overline{N} = 1$ байх нь ойлгомжтой. Мөн

$$\overline{\overline{m}} = \frac{N}{N/m} = m$$

байх нь илэрхий. Де Морганы

$$\overline{m \oplus n} = \overline{m} \odot \overline{n},\quad \overline{m \odot n} = \overline{m} \oplus \overline{n}$$

дүрэм биелнэ. Жишээ нь $6 \oplus 21 = [6,21] = 42$

$$\overline{6} \odot \overline{21} = 35 \odot 10 = (35,10) = 5 \quad \text{харин} \quad \overline{42} = 5 \text{ ба } 6 \odot 21 =$$

$= (6,21) = 3$ ба $\overline{6} \oplus \overline{21} = 35 \oplus 10 = [35,10] = 70$ харин $\overline{3} = 70$

Де Морганы дүрмийг бүрэн батлахыг уншигчдадаа үлдээе.

Одоо аливаа Булийн алгебрт биелдэг ямар нэг тэнцэтгэлийн тухайлбал, бидний мэдэх

$$A(A + C)(B + C) = AB + AC$$

авч үзье. Үүний хоёр талд «зураас» үйлдлийг хэрэглэвэл

$$\overline{A(A + C)(B + C)} = \overline{AB + AC}$$

болно. Тэгвэл де Морганы дүрмээр

$$\overline{A(A + C)(B + C)} = [\overline{(A(C + C)}](\overline{B + C}) = \overline{A(A + C)} + \overline{B + C} = \overline{A} + \overline{A + C} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{AC} + \overline{BC} \text{ ба}$$
$$\overline{AB + AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$$

болно. Тийнхүү эцэст нь $\overline{A} + \overline{AC} + \overline{BC} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$ Гэтэл энэ тэнцэл нь дурын $\overline{A}$, $\overline{B}$ ба $\overline{C}$-ийн хувьд биелэх тул $\overline{A}$, $\overline{B}$ ба $\overline{C}$ элементүүдийг A, B ба C гэж тэмдэглэвэл

$$A + AC + BC = (A + B)(A + C)$$

гэсэн анхны тэнцэтгэлд хоёрломол тэнцэтгэл гарна. Ийнхүү «зураас» үйлдлийн чанараас л хоёрломолын зарчим гарч байна (юуны урьд де Морганы дүрмээс!) Энэ үед хэрэв өгсөн тэнцэтгэл нь 0 буюу I гэсэн «онцгой» элементийг агуулж байвал

$$\overline{O} = I \text{ ба } \overline{I} = O$$

тэнцэтгэлээр хувиргасан (хоёрлох) тэнцэтгэлд O-ийн оронд I, ба I-ийн оронд O-ийг бичихээ мартаж болохгүй юм.

Жишээ нь, $A(A + I)(A + O) = AB$ тэнцэтгэлийн хоёр талд «зураас» үйлдлийг хэрэглэвэл

$$\overline{A(A + I)(B + O)} = \overline{AB}$$

буюу $\overline{A(A + I)(B + O)} = \overline{A(A + I)} + \overline{B + O} =$
$= \overline{A} + \overline{A + I} + \overline{B + O} = \overline{A} + \overline{A}\overline{I} + \overline{B}\overline{O} = \overline{A} + \overline{A}O + \overline{B}I$
ба $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ тул
$$\overline{A} + \overline{A}O + \overline{B}I = \overline{A} + \overline{B}$$

болно. Гэтэл сүүлчийн тэнцэтгэл нь (энд $\overline{A}$ ба $\overline{B}$ нь дурын) учраас

$$A + AO + BI = A + B$$

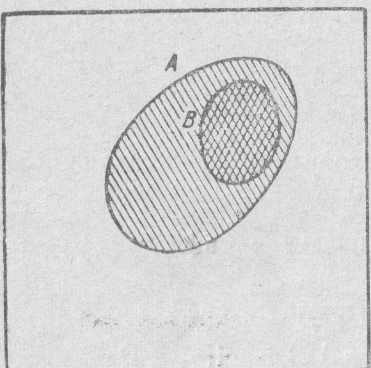
гэсэн анхны тэнцэтгэлд хоёрломол тэнцэтгэлтэй адил чанартай байна.

Хоёрломолын зарчим нь бидний тогтоосноос бүр өргөн хүрээтэй хэрэглэгддэгийг дурдая. Жишээлэхэд булийн тэнцэлтэй хамт «булийн тэнцэл бишид» ч бас хэрэглэгдэнэ. Үүнийг тайлбарлахын өмнө булийн алгебрт нэн чухал үүрэг гүйцэтгэдэг бас нэг ухагдахуунтай танилцая.

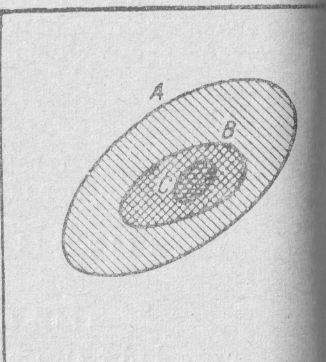
Ямарваа Булийн алгебрт элементүүдийн ухагдхууны хамт ($A = B$ тэнцэтгэл нь: A, B нь Булийн алгебрийн нэг ижил элемент гэсэн үг) өөр нэг чухал харьцаа оршдог юм. Энэ нь тооны алгебрт «их» (эсвэл «бага») гэж нэрлэж заншсан харьцааны гүйцэтгэдэг үүрэгтэй (төсөөтэй утгатай харьцаа юм. Энэ харьцааг $\supset$ (эсвэл $\subset$) тэмдгээр тэмдэглэнэ.

$$A \supset B \text{ эсвэл } B \subset A$$

гэж бичнэ. (Сүүлчийн хоёр харьцаа нь нэг адил утгатай ба $a > b$ эсвэл $b < a$-тай төстэй юм). Олонлогийн алгебрт $A \supset B$ гэдэг нь A олонлог B олонлогийг өөрийнхөө хэсэг болгож агуулна гэдгийг заана (23 дугаар зураг). Жишээ нь: A_2 тэгш тоонуудын олонлог, A_6 6-д



23 дугаар зураг



24 дүгээр зураг

хуваагдах тоонуудын олонлог бол

$$A_2 \supset A_6 \text{ байна.}$$

мөн A танай ангийн үүрэгтэй суралцагсдын олонлог, B онцчуудын олонлог бол $A \supset B$ байх шүү дээ. A ба B

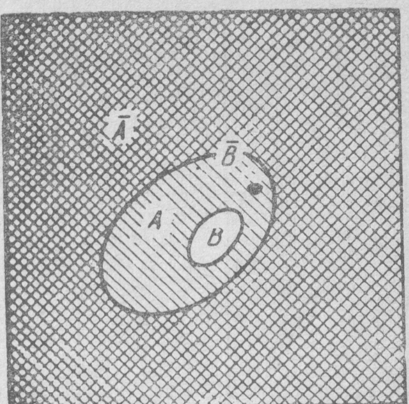
олонлогууд давхцаж байлаа ч гэсэн бид $A \supset B$ гэж бичиж болно. Энэ үед B олонлог A-д бүхлээрээ агуулагдах шүү дээ! Тийнхүү Булийн алгебрийн элементүүдийн хоорондох $\supset$ харьцаа нь тоонуудын хоорондох $\geqslant$ «их юмуу тэнцүү») харьцаатай төстэйгээс биш $>$ («эрс их») харьцаатай төсгүй юм.

Хэрэв $A \supset B$ ба $B \supset C$ бол $A \supset C$ байх нь ойлгомжтой. (24 дүгээр зураг). Үүнтэй адилаар тоонуудын хувьд ч $a \geqslant b$ ба $b \geqslant c$ харьцаанаас $a \geqslant c$ гэж гардаг билээ. Мөн

$$A \supset B \text{ ба } B \supset A \text{ бол } A = B$$

байна. Тоонуудын хувьд бас $a \geqslant b$ ба $b \geqslant a$ бол $a = b$ байдаг билээ. Эцэст нь (энэ бидэнд онцгой чухал!) $A \supset B$ бол $\bar{A} \subset \bar{B}$ (25 дугаар зураг) байна.

Жишээ нь үүрэгтэй суралцагсдын олонлог нь онцчуудын олонлогоос их гэдгээс үүрэггүй (муу) суралцагсдын олонлог онц сурдаггүй сурагчдын олонлогт агуулагдана гэж гарна.



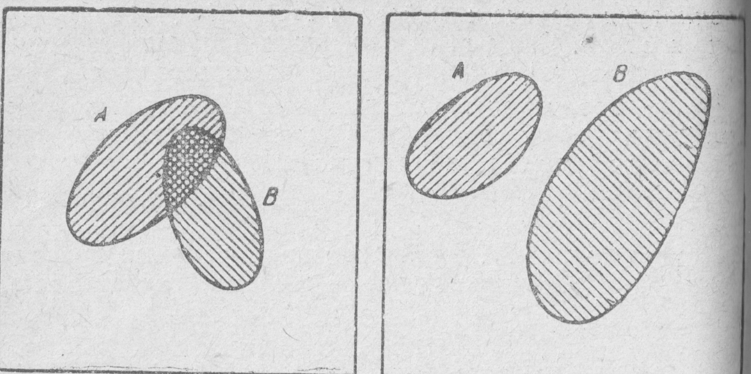
25 дугаар зураг

Энэ хүртэл бид олонлогийн $\supset$ харьцаа ба тооны $\geqslant$ харьцааны төстэй талыг онцлон авч үзлээ. Одоо энэ хоёр харьцааны нэг гол ялгааг дурдая. Ямарч хоёр тоог (бодитой) хооронд нь жишиж болно, өөрөөр хэлбэл, $a \geqslant b$ ба $b \geqslant a$ харьцааны ядаж нэг нь хүчинтэй.) Тэгвэл A ба B олонлогийн хувьд $A \supset B$ ба $B \supset A$ харьцааны аль нь ч биелэхгүй байж болно (26 дугаар зураг)

Олонлогийн алгебрийн ямарваа A элементийн хувьд

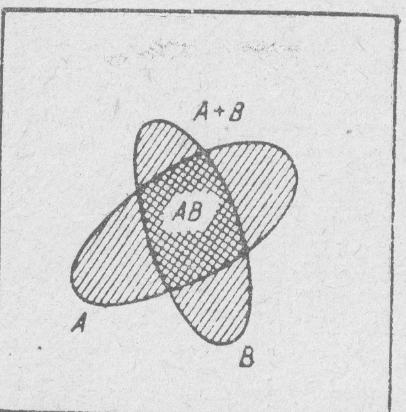
$$I \supset A \text{ ба } A \supset O$$

бас ямарваа A ба B элементийн хувьд



а) б)

26 дугаар зураг



27 дугаар зураг.

$$A + B \supset A \quad ABC \subset A$$

(27 дугаар зураг) байна.

Бидний мэдэх бусад Булийн алгебрийн хувьд $\supset$ харьцааны утга учрыг гаргая. «Хоёр тооноос тогтох алгебрд» (2 §-ийн 1 дүгээр жишээ) энэ харьцааг

$$1 \supset 0$$

гэж, харин «Дөрвөн тооны алгебрд» (2 §-ийн 2 дугаар жишээ)

$$1 \supset 0, \ 1 \supset p \quad 1 \supset q, \quad p \supset 0$$

гэж тодорхойлов. (p, q-нь жишигдэхгүй, өөрөөр хэлбэл $p \supset q$, $q \supset p$ харьцааны нэг нь ч үл биелнэ. «Максимум ба минимумы алгебрт (2 §-ийн 3 дугаар жишээ) $\supset$ харьцаа нь $\geqslant$ харьцаатай давхцана. Үүнд: хэрэв x тоо нь y тооноос багагүй бол $x \supset y$ биелэнэ гэж үзнэ. Тэгэхлээр (жишээлэхэд $\frac{1}{2} \supset \frac{1}{3}$ ба $1 \supset 1$)[1] Эцэст нь «хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчдын алгебрт» (2 §-ийн 4 дүгээр жишээ) m тооны хуваагч нь n бол $m \supset n$ гэж авна. Энд $42 \supset 6$ ба 42 ба 35 нь жишигдэхгүй. Эдгээр Булийн алгебрт тодорхойлсон $\supset$ харьцаа нь олонлогийн алгебр дахь $\supset$ харьцааны бүх чанарыг хадгална гэдгийг шалгаж үзээрэй!

Баруун ба зүүн хэсэг нь $\supset$ (эсвэл $\subset$) харьцаагаар холбогдсон томьёог *Булийн тэнцэтгэл биш* гэдэг. Бид энд тэнцэтгэл бишид орж буй Булийн алгебрийн A, B, C . . . элементүүдийн бүх утгад хүчинтэй байдаг, тухайлбал дээр авч үзсэн $I \supset A$, $A \supset 0$, $A + B \supset A$ $A \supset AB$ тэнцэтгэл бишүүд шиг тийм тэнцэтгэл бишүүдийн тухай ярих болно.

Тэгвэл хоёрлох зарчмаар *Булийн тэнцэтгэлбишид үржихийг нэмэхээр, нэмэхийг үржихээр, 0 элементийг (хэрэв энэ элемент манай тэнцэлбишид орвол) I-ээр, I элементийг 0 элементээр солиод мөн тэнцэл бишийн тэмдгийг урвуугаар (өөрөөр хэлбэл $\supset$ харьцааг $\subset$ харьцаагаар нь) солиход дахиад л үнэн тэнцэтгэл биш (өөрөөр хэлбэл түүнд байгаа Булийн элементийн бүх утганд биелэх) гарна.*

Жишээ нь: $(A + B)(A + C)(A + I) \supset ABC$ (энэ зүйлийн төгсгөлд байгаа дасгалын 8 б үз) гэдгээс

$$AB + AC + AO \subset A + B + C$$

гэж ямагт гарна.

Хоёрлох зарчмыг батлахын тулд өгсөн тэнцэтгэл бишийн хоёр талд нь «зураас» үйлдлийг хэрэглэвэл хангалттай. $(A + B)(A + C)$ $(A + I) \supset ABC$ тэнцэтгэл биш ба, «хэрэв $A \supset B$ бол $\overline{A} \subset \overline{B}$ байна» гэсэн дүрмээс $\overline{(A + B)(A + C)(A + I)} \supset \overline{ABC}$ тэнцэтгэл биш бас хүчинтэй гэж гарна. Тэгвэл $\overline{I} = O$ гэдгийг анхаарвал де Морганы дүрэм ёсоор $\overline{(A + B)(A + C)(A + I)} = \overline{(A + B)} + \overline{(A + C)} + \overline{A + I} = \overline{A + B} + \overline{A + C} + \overline{A}\overline{I} = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + \overline{A}O$ болно.

[1] Булийн энэ алгебрт ямарч хоёр x, y элементийн хувьд $x \supset y$ ба $y \supset x$ хоёр харьцааны ядахдаа нэг нь ямагт биелнэ.

Үүний адил $ABC = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Тийнхүү Булийн алгебрийн дурын A, B, C элементүүдийн хувьд

$$\overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + \overline{A}\overline{O} \supset \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

тэнцэтгэл биш хүчинтэй. Нэгэнт A, B, C нь дурын элементүүд тул эдгээрийг A, B, C гэвэл

$$AB + AC + AO \subset A + B + C$$

гэсэн өгсөн тэнцэл бишид дээрх заасан утгаар хоёрлосон тэнцэтгэл бишид хүрч ирлээ.

Дасгалууд

1. 1 §-ийн 1—10 дугаар дасгалын бүх тэнцэтгэлтэй хоёрлох бүх тэнцэтгэлүүдийг бич.

2. Олонлогийн алгебрийн дараах адилтгалуудыг батал:

а) $(A + B)(A + \overline{B}) = A$

б) $AB + (A + B)(\overline{A} + \overline{B}) = A + B$

в) $ABC\ \overline{A}\overline{B}\ AC = O$

г)* $A + \overline{A}B = A + B$

3. Булийн алгебрийн ямар нэг тэнцэтгэлд «зураас» үйлдэл орсон байвал уг тэнцэтгэлд нэмэхийг үржихээр, үржихийг нэмэхээр 0 ба I элементийг бие биеэр нь сольж, харин «зураас» үйлдлийг байранд нь хэвээр үлдээхэд мөн зөв тэнцэтгэл гарна. [Жишээ 2 дугаар дасгалын в-гээс:

$$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{A} + \overline{B} + \overline{A} + C = I \text{ гэж гарна}]$$

4. 2 а, б, г дасгал, 3 дугаар дасгалд дурдсан хоёрлох зарчмаар ямар тэнцэтгэлүүд үүсэх вэ?

5. «Дөрвөн тооны алгебрт» $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$ гэсэн де Морганы хоёр дугаар дүрэм биелэхийг шалга.

6*. а) $N = P_1P_2 \ldots P_k$, $P_1, \ldots, P_k$

нь өөр хоорондоо ялгаатай анхны тоонууд байг. Энэ үед N-ийн хуваагчид элемент нь болох «хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчийн алгебр «нь» $I = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ универсал олонлогийн дэд олонлогуудын алгебрт» шилжих ба энд де Морганы дүрмийн сацуу Булийн алгебрийн бүх хуулиуд биелнэ гэдгийг гарга.

б) $N = P^A$, p-анхны, A-натурал тоо байг. Энэ үед N-ийн хуваагчид элемент нь болох «хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчийн алгебр» нь $\{0, 1, 2 \ldots A\}$ тоонууд дээр тодорхойлогдсон «максимум ба минимумын утгын алгебрт» шилжихийг батал

эндээс «хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчийн» мөн тэр алгебрт Булийн алгебрийн бүх дүрмүүд ба де Морганы дүрэм биелнэ гэдгийг гарга.

в) $N = P_1^{A_1}P_2^{A_2} \ldots P_k^{A_k}$, $m = P_1^{a_1}P_2^{a_2} \ldots P_k^{a_k}$

үүнд $0 \leqslant a_1 \leqslant A_1, \ldots, 0 \leqslant a_k \leqslant A_k$ байг. (2§-ийн 6 дугаар дасгалтай харьцуул). $\overline{m} = \frac{N}{m}$ тоог анхны үржигдхүүнд задалсан илэрхийлэл ямар хэлбэртэй байх вэ? «Хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их ерөнхий хуваагчийн алгебрт» де Морганы дүрэм биелэхийг олсон томьёогоо ашиглан батал.

7*. $A + A = I$ ба $AA = O$ гэсэн тэнцэтгэлүүд чинийн мэдэх Булийн ямар алгебрт биелэх ба ямарт нь үл биелэх вэ?

8. Олонлогийн алгебрын дараахь тэнцэтгэл бишүүдийг батал.

а) $A + B + C \supset (A + B)(A + C)$;

б) $(A + B)(A + C)(A + I) \supset ABC$;

в) $(A + B)(B + C)(C + A) \supset ABC$;

г) $A + B \supset AB + \overline{A}B$

9. 8 а-в дасгалаас хоёрлох зарчмаар гаргах тэнцэтгэл бишүүдийг бич. Хоёрлох зарчим ашиглалгүйгээр энэ тэнцэтгэл бишүүдийг шууд батал.

10. Хэрэв булийн тэнцэтгэл биш нь «зураас» үйлдлийг агуулж байвал, түүний Булийн үржихийг булийн нэмэхээр, мөн урвуулж O элементийг I элементээр, мөн урвуулан сольж харин «зураас» үйлдлийг байранд нь үлдээж, тэнцэтгэл бишийн тэмдгийг урвуугаар нь соливол мөн зөв тэнцэтгэл биш гарна. 8 г дасгалаас шинэ тэнцэтгэл биш гаргахдаа энэ зарчмыг хэрэглэ.

11. $\supset$ харьцааны бүх чанарыг

а) «Максимум ба минимум утгын алгебрт»

б) «Хамгийн бага хуваагдагч ба хамгийн их хуваагчийн алгебрт» шалга.

12*. A ба B олонлогийн хувьд $A \supset B$ байг.

а) $A + B$, б) AB, в) $A + \overline{B}$, г) $\overline{A}B$

илэрхийллүүдийг хялбарчил.

4 §. Олонлог ба хэллэг, Хэллэгийн алгебр

Энэ товхимолын хувьд үндсэн хэсэг болох олонлогийн булийн алгебрт эргэж оръё. Энэ алгебрийн элементүүд болох олонлогуудыг яаж тодорхойлж болдгийг авч үзье. Олонлогийг өгөх хялбар арга нь өгөх

буюу *тоолох арга* гэж нэртэй. Энэ аргаар бол авч үзэж буй олонлогийн бүх элементүүдийг заадаг (дуудаг) жишээ нь «Саша, Сеня, Миша, Катя гэсэн сурагчдын олонлог" -ийн тухай «1, 2, 3, 4, 5» гэсэн тоонуудын олонлогийн ,,тухай эсвэл" нэмэх, хасах, үржих, хуваах гэсэн арифметикийн 4 үйлдлийн олонлогийн» тухай ярьж болно. Математикт ямар нэг олонлогийн бүх элементүүдийг заагаад, тэдгээрийг их хаалтанд хийдэг. Тухайлбал $A = \{$Саша, Соня, Катя, Миша$\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ эсвэл $C = \{+, -, x:\}$ (сүүлчийн бичлэгт үйлдлийн тэмдгүүд нь уг үйлдлүүдээ төлөөлнө).

Олонлогийн элементүүд нь маш олон үед олонлогийг тэгж өгөх нь тун тохиромжгүй байдаг, төгсгөлгүй олонлогийг тэгж өгөх нь бүрч зохимжгүй (олонлогийн төгсгөлгүй олон элементийг бид тоолж чадахгүй шүү дээ!) Бас заримдаа олонлогийг өгөх арга нь боломжтой хялбарч гэсэн авч үзэж буй олонлогийн уг утгыг бүдэгрүүлж, чухам л яг энэ элементүүдийг нэг олонлогт нэгтгэх болсон үндсэн санааг илрүүлдэггүй.

Олонлогийг өгөх маш дэлгэрсэн нэг арга гэвэл олонлогийг элементүүдийг шинжээр нь тоймлон өгөх (далд) арга юм. Энэ аргаар бол авч үзэж буй олонлогийн л бүх элементүүдийг тодорхойлох шинжийг заадаг юм. Жишээ нь ,,танай ангийн бүх онцчуудын олонлог" (энэ нь дээр авч үзсэн A олонлог ч байж мэднэ)" $0 < x \leqslant 5$ байх бүх бүхэл тоонуудын олонлог (энэ нь B олонлог байна), эсвэл ,,Москвагийн амьтны хүрээлэн дэх бүх араатнуудын олонлог" гэж ярьж болно. Ялангуяа ,,бүх бүхэл тоонуудын олонлог" «1 талбайтай бүх гурвалжнуудын олонлог» мэтийн төгсгөлгүй олонлогийг ялгахад олонлогийг шинжээр нь өгөх арга нь маш тохиромжтой. Төгсгөлгүй олонлогийг зөвхөн энэ аргаар л өгч болдгийг бид дээр тэмдэглэсэн.

Олонлогийг шинжээр нь өгөх арга нь олонлогуудыг математик логикт судалдаг хэллэгүүдтэй холбодог. Энэ аргаар бол юмсын ямар нэг олонлогийг аваад (жишээ нь танай ангийн сурагчдын олонлог, эсвэл бүхэл тоонуудын олонлог) дараа нь зөвхөн манай авч үзэж буй олонлогийн бүх элементүүд хангаж байх тэр хэллэгийг томьёолно. Тухайлбал бид зөвхөн танай ангийн сурагчдын олонлогийг сонирхож байгаа бол тийм хэллэгүүд гэвэл: ,,тэр онц сурлагатан", ,,тэр шатар тог-

лодог", ,,тэр нэгдүгээр эгнээнд суудаг", ,,түүнийг Андрей гэдэг" гэх мэт. Авч үзэж буй универсал I олонлогийн (сурагчдын олонлог, тоонуудын олонлог гэх мэт) өгсөн a хэллэгийн агуулгыг тодорхойлж буй чанарыг хангаж байгаа бүх элементүүдээс тогтох A олонлогийг өгөгдсөн хэллэгийн үнэний олонлог[1] гэдэг (28 дугаар зураг).



28 дугаар зураг

Үгээр бид олонлог ба хэллэгийн хооронд ,,хоёр талт холбоог" тогтоолоо: олонлог бүр ямар нэг хэллэгээр тодорхойлогдоно (олонлогийн элементүүдийг дурдсан хэллэг байж болно). Жишээ нь ,,тэр-Саша, эсвэл Сеня, эсвэл Миша, эсвэл Катя") харин хэллэг бүрт энэ хэллэгийн үнэний олонлог гэгдэх тодорхой олонлог харгалзана. Ингэхдээ ямарч хэллэгийн хувьд энэ хэллэгт ярьж буй бүх элементүүдийг агуулсан универсал I олонлогийг ямагт зааж өгөх болно. Энэ чухал нөхцөл хэллэг гэсэн ойлголтыг тайлбарлах боломж олгоно. *Үнэн эсвэл худлы нь шүүж болох* (авч үзэж буй универсал олонлогийн тодорхой элементэд хэрэглэхэд) *хүүрнэх өгүүлбэрийг хэллэг*[1] гэж үзнэ. Тухайлбал ,,тэр хоёр толгойтой ба арван зургаан гартай", эсвэл «$2 \times 3 = 6$» нь хэллэг болно.

(үүний хоёр дахь нь универсал I олонлогийн сонголтоос ерөөсөө хамаарахгүй), харин ,,Майн нэгэн мандтугай!" гэсэн уриа, эсвэл „ёох„ гэсэн аялга үг нь мэдээж хэллэг болохгүй.

[1] Бид хэллэгүүдийг латиний жижиг үсгээр түүнд харгалзах үнэний олонлогийг латины том үсгээр тэмдэг лэнэ.

Хэллэгийн тодорхойлж буй олонлогийг л бид сонирхох тул a ба b хэллэгийн харгалзах үнэний олонлог нь тэнцүү бол тийм хоёр хэллэгийг ялгахгүй, адил гэж үзнэ. a, b хоёр хэллэг адил (жишээ нь: „тэр онц сурлагатан“ ба „тэр зөвхөн онц үнэлэлт авдаг“ эсвэл „x сондгой тоо“ ба x тоог 2-т хуваахад 1 үлдэнэ“) бол $a = b$[1] гэж бичих болно.

I олонлогийн ямар элементийг авч үзэв гэдгээс үл хамааран ямагт үнэн байдаг хэллэгүүдийг адилтгал үнэн (буюу агуулгагүй) хэллэгүүд гэх ба тэдгээрийн бүтцийг адил гэж тооцно. Жишээ нь „$2 \times 3 = 6$“, „тэр (танай ангийн сурагч), хүү буюу охин“, „түүний (сурагчийн) өндөр 3 *м*-ээс хэтрэхгүй“ гэх мэт хэллэгүүд нь адилтгал үнэн хэллэгүүд байна. Бүх адилтгал үнэн хэллэгүүдийг i үсгээр тэмдэглэнэ. Бүх адилтгал худал (харшлал) хэллэгүүдийг (хэзээ ч үнэн байхгүй) өөрөөр хэлбэл үнэний олонлог нь хоосон олонлог байдаг хэллэгүүдийг бас адил гэж тооцоод 0 үсгээр тэмдэглэнэ. Жишээ нь „$2 \times 2 = 6$“, „тэр (танай ангийн сурагч) нисэж чадна“, „түүний өндөр 4 *м*-ээс илүү“ „тэр (тоо) 3-аас их ба 2-оос бага„

Олонлог ба хэллэгийн хоорондохь энэ холбоо нь олонлогийн алгебр дээр үзсэн үйлдлүүдтэй адил нэг төрлийн өвөрмөц алгебрийн үйлдлүүдийг хэллэгүүд дээр тодорхойлох боломж олгож байна.

Тухайлбаас *a ба b хэллэгийн нийлбэр гэж үнэний олонлог нь a хэллэгийн үнэний олонлог A ба b хэллэгийн үнэний олонлог B-ийн нийлбэртэй давхцах тийм хэллэгийг хэлнэ.* Энэ хэллэгийг $a + b$ тэмдгээр тэмдэглэхээр тохиръё. Хоёр олонлогийн нийлбэр нь уг хоёр олонлогт орж буй бүх элементүүдийн нэгдэл байдаг. Тэгвэл a ба b хэллэгийн нийлбэр нь „a буюу b“ гэсэн хэллэг байна, энд «буюу» гэдэг холбоос үг нь эсвэл a хэллэг, үнэн, эсвэл b хэллэг үнэн эсвэл энэ хоёр хэллэг хоёулаа зэрэг үнэн гэдгийг заана.

Жишээ нь a нь „тэр шатар тоглож чадна“ гэсэн хэллэг ба танай ангийн энэ хэллэгт харгалзах үнэний олонлог нь

---

[1] Энд тэнцүүгийн тэмдэг нь хоёр хэллэг адил утгатай болохыг заана орч.

[2] Математик логикт a ба b хэллэгийн нийлбэрийг тэдгээрийн дизъюнкц гэж нэрлэх ба $a \vee b$ тэмдгээр тэмдэглэдэг.

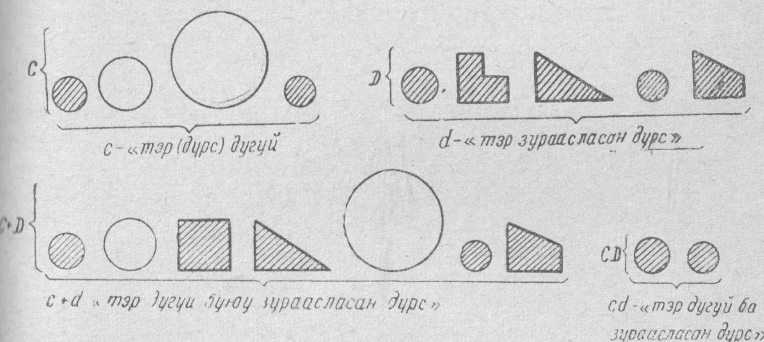
$A = \{$Саша, Сема, Миша, Андрюша, Катя, Шура, Лена$\}$ харин b нь „тэр даам тоглож чадна“ гэсэн хэллэг ба түүний үнэний олонлог нь

$B = \{$Саша, Миша, Петя, Игорь, Катя, Света$\}$

бол $a + b$ нь {тэр шатар тоглож чаддаг буюу тэр даам тоглож чаддаг} (товчоор „тэр шатар буюу даам тоглож чаддаг“) гэсэн хэллэг болох ба энэ хэллэгт харгалзах үнэний олонлог нь

$A + B = \{$Саша, Сема, Миша, Андрюша, Петя, Игорь, Катя, Шура, Лена, Света$\}$

болно.



29 дүгээр зураг

Хэрэв универсал олонлог нь 29 дүгээр зураг дээрх дүрс c нь „тэр (дүрс) дугуй“ d нь „тэр зурааслагдсан дүрс“ гэсэн хэллэгүүд бол $c + d$ нь“ тэр дүрс дугуй буюу зурааслагдсан» гэсэн хэллэг болно (29 дүгээр зураг).

Үүний адилаар A ба B үнэний олонлогтой a ба b хэллэгийн үржвэр гэж *үнэний олонлог нь AB (AB-гийн огтлолцол)-тэй давхцах тийм хэллэгийг хэлнэ.*[1]

Гэтэл A, B олонлогийн үржвэр AB нь A, B олонлогт хоёуланд нь орох зөвхөн тийм элементүүдээс тогтдог билээ, иймд $a, в$ хэллэгийн үржвэр $ав$ нь „a

---

[1] Математик логикт $a, в$ хэллэгийн үржвэрийг тэдгээрийн конъюнкц гэж нэрлээд $a \wedge b$ тэмдгээр тэмдэглэдэг.

(Үүнийг A ба B олонлогийн үржвэр $A \cup B$-тэй жиш)

ба в" гэсэн хэллэг байх ба энд „ба" гэдэг холбоос үг нь a, b хоёр хэллэг хоёул үнэн байх ёстойг заана.

Жишээ нь $a, в$ хэллэгүүд нь танай ангийн сурагчидтай холбогдох дээр авч үзсэн хэллэгүүд бол $ав$ нь „тэр шатар ба даам тоглож чадна" гэсэн хэллэг болох ба түүний үнэний олонлог нь AB={Саша Миша, Катя} болно.

Хэрэв c, d нь „тэр дүрс дугуй" „тэр дүрс зураасалгдсан" гэсэн 29 дүгээр зураг) хоёр хэллэг бол cd нь „тэр дүрс дугуй ба зураасалгдсан" гэсэн хэллэг болно.

Олонлог ба хэллэгийн хоорондын холбоо нь олонлогийн алгебрын бүх дүрмийг хэллэг дээр шилжүүлэх бололцоо олгож байна:

$$a+b=b+a,\ ab=ba$$
хэллэгийн алгебрын байр солих хуулиуд

$$(a+b)+c=a+(b+c)(ab)c=a(bc)$$
хэллэгийн алгебрын бүлэглэх хуулиуд

$$(a+b)c=ac+bc\ \ ab+c=(a+c)(b+c)$$
хэллэгийн алгебрын хаалт нээх хуулиуд

$$a+a=a,\ aa=a$$
хэллэгийн алгебрын идемпотент хуулиуд

Цаашилбал, i-нь адилтгал үнэн хэллэг o-нь адилтгал худал хэллэг бол ямарваа a хэллэгийн хувьд ямагт

$$a+o=a\ \ ai=a,\ a+i=i\ \ ao=o$$

байна. Жишээ нь „тэр онц сурлагатан буюу тэр хоёр толгойтой" гэсэн хэллэг нь „тэр онц сурлагатан" гэсэн хэллэгтэй адил харин „тэр сэлж чаддаг ба тэр 200-гаас бага настай" гэсэн хэллэг нь „тэр сэлж чадна" гэсэн хэллэгтэй адил[1].

[1] Дээр хэлсэн хуулиудыг математик логикийн номуудад дараахь хэлбэрээр бичдэг. Үүнд:

$$a\vee b=b\vee a \qquad a\wedge b=b\wedge a$$
$$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)\ (a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$
$$(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(в\vee c)$$
$$a\vee a=a\ \ a\wedge a=a,\ a\vee 0=a$$
$$a\wedge i=a,\ a\wedge i=i\ \ a\wedge 0=0.$$

Ямар замаар олонлогийн алгебрын дүрмээс хэллэгийн алгебрын дүрэм гаргадгийг нэг жишээн дээр, тухайлбал 2 дугаар хаалт нээх хууль дээр, авч үзье. Хоёр хэллэгийн нийлбэрийн үнэний олонлог нь үг хоёр хэллэгийн үнэний олонлогийн нийлбэртэй тэнцүү, харин хоёр хэллэгийн үржвэрийн үнэний олонлог нь үнэний олонлогийн үржвэртэй тэнцүү тэгвэл $ab+c$ гэсэн нийлмэл хэллэг „a ба b" буюу c"-ийн үнэний олонлог нь $AB+C$ байна, энд A, B, C нь харгалзан a, b, c хэллэгийн үнэний олонлог юм. Үүний адилаар $(a+c)(b+c)$ нийлмэл хэллэгийн үнэний олонлог нь $(A+C)(B+C)$ болно. Гэтэл 2 дугаар хаалт нээх хуулиар $AB+C=(A+C)(B+C)$ байна. Энэ нь $ab+c$ $(a+c)(b+c)$ хоёр хэллэгийн үнэний олонлог давхцахыг харуулж байна.

Тэгвэл эндээс $ab+c$, $(a+c)(b+c)$ хэллэгүүд адил гэж гарч байна.

1 дүгээр зүйлд дурдсан „тэр шатар ба даам тоглож чадна, буюу сэлж чадна" „тэр шатар тоглож чаддаг буюу сэлж чаддаг, мөн тэр даам тоглож чаддаг буюу сэлж чаддаг" гэсэн хэллэгүүд адил утгатай байдгийг харуулсан' өөрөөр хэлбэл $ab+c=(a+c)(b+c)$ юм. Энд a, b, c нь „тэр шатар тоглож чадна" „тэр даам тоглож чадна„ „тэр сэлж чадна" гэсэн хэллэгүүд юм.

Олонлогийн нэмэх ба үржүүлэх үйлдлийн хамтаар мөн „зураас" үйлдлийг хэллэгийн алгебрт шилжүүлэн авчирч болно. Ингэвэл *үнэний олонлог нь $\bar{A}$ байдаг тийм хэллэгийг $\bar{a}$ гэнэ*. Энд A нь a хэллэгийн үнэний олонлог. Өөрөөр хэлбэл универсал I-ийн олонлог A олонлогт ордоггүй элементүүд зөвхөн тэд л $\bar{a}$ нөхцөлийг хангана. a-нөхцөлийг хангадаггүй элементүүд л $\bar{a}$ нөхцөлийг хангана). Жишээ нь a нь „тэр муу дүн авдаг" гэсэн хэллэг бол $\bar{a}$ нь „тэр муу дүн авдаггүй" гэсэн хэллэг болно. Универсал олонлог I нь 28 дугаар зураг дээрхи дүрсүүдээс тогтдог ба b нь „тэр (дүрс) гурвалжин" гэсэн хэллэг бол $\bar{b}$ нь „тэр гурвалжин биш" гэсэн хэллэг болно (30 дугаар зураг). Ерөнхийдөө $\bar{a}$ хэллэг нь „a биш" гэсэн утгатай. Иймд хэллэгийн алгебрийн „зураас" үйлдлийг *үгүйсгэл* гэж нэрлэдэг.



30 дугаар зураг

Одоо үгүйсгэлийн үйлдэлтэй холбогдсон хэллэгийн алгебрийн дүрмүүдийг тоочвол:

$$\bar{\bar{a}} = a,\ a + \bar{a} = i \text{ ба } a\bar{a} = o$$

$$\bar{o} = i \text{ ба } \bar{i} = o$$

$$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b} \text{ ба } \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

Үнэндээ адилтгал худал хэллэгийн үгүйсгэл нь (жишээ нь „2×2 нь 5-тай тэнцүү *биш*" буюу „энэ сурагч хоёр толгойтой *биш*") ямагт адилтгал үнэн хэллэг байна. Харин адилтгал үнэн (энэ сурагч 120-аас бага настай) хэллэгийн үгүйсгэл нь („энэ сурагч 120-аас их настай") адилтгал худал хэллэг байна. Бусад бүх хуулиудыг хялбархан шалгаж болно (үүнийг хийцгээ).

Гэвч тэдгээрийг тусгай аргаар шалгах гэхийн хэрэггүй, учир нь тэд олонлогийн алгебрийн харгалзах дүрмүүдээс гарна.[1]

Дасгалууд

1. Адилтгал үнэн хэллэгийн гурав, адилтгал худал хоёр хэллэгийн жишээ гарга.

2. a нь а) «$2 \times 2 = 4$»
б) «тэр-хүү»
в) «заан—шавьж мөн»
г) „тэр нисэж чадна" гэсэн хэллэг байг. Тэгвэл $\bar{a}$ нь ямар хэллэгүүд байх вэ? Энэ нь адилтгал үнэн хэллэг мөн үү? Адилтгал худал хэллэг мөн үү?

3. a-нь „тэр шатар тоглож чадна" b нь „тэр даам тоглож чадна" гэсэн хэллэгүүд бол а) $a + b$; б) ab; в) $\bar{a} + b$; г) $a + \bar{b}$; д) $\bar{a} + \bar{b}$; е) $\bar{a}b$; ж) $a\bar{b}$; з) $\bar{a}\bar{b}$ хэллэгүүд нь ямар утгатай вэ?

4. a нь „тэр (сурагч) онц сурлагатан" b нь „тэр хар үстэй хүн" c нь „тэр сэлж чадна" гэсэн хэллэгүүд бол а) $(a + b)c$ ба $ac + bc$ б) $ab + c$ ба $(a + c)(b + c)$ хэллэгүүд ямар утгатай вэ?

5. a нь „тэр (натурал) тоо тэгш"
b нь „тэр тоо энгийн" гэсэн хэллэгүүд бол а) ab; б) $\bar{a} + b$; в) $\bar{a}b$; г) $a\bar{b}$, д) $\bar{a} + \bar{b}$ хэллэгүүд ямар утгатай вэ?
Энэ хэллэгүүдийн үнэний олонлог нь юу вэ?

6. a нь „тэр сурагч математикийн дугуйланд оролцдог" b нь „тэр хорт дуулдаг" гэсэн хэллэгүүд бол
а) $\overline{a + b}$ ба $\bar{a}\bar{b}$
в) $\overline{ab}$ ба $a + b$ хэллэгүүд ямар утгатай вэ?

---

[1] $\overline{a + b}$ ба $\bar{a}\bar{b}$ хэллэгүүдийн үнэний олонлог нь харгалзан $\overline{A + B}$ ба $\bar{A}\bar{B}$ болно, гэтэл $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$, тэгвэл хэллэгүүдийн тэнцэтгэлийн тодорхойлолтоор

$$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b} \text{ байна.}$$

5 §. Сэтгэлгээний хуулиуд ба гаргалгааны дүрмүүд

Одоо ямар учраас Дж Буль, энэхүү номонд авч үзсэн «ер бусийн алгебрууд»-ыг бүтээсэн өөрийн бүтээлдээ „Сэтгэлгээний хуулиудын шинжилгээ" гэж нэрлэсний учрыг тайлбарлая. Үнэндээ хэллэгийн алгебр нь хүний сэтгэхүйн үйл явцдаа удирдлага болгодог дүрмүүдтэй шууд холбоотой байна. Учир нь: бидний дээр тодорхойлсон хэллэгийн нийлбэр ба үржвэр нь „буюу", „ба" гэсэн логик холбоосуудыг тэмдэглэж байна. Харин „зураас" үйлдэл нь үгүйсгэлийн утгыг илэрхийлнэ, гэтэл хэллэгийн алгебрын хуулиуд нь бүх хүн удирдлага болгодог логик үйлдлийн үндсэн чанарыг тодорхойлдог. Зөвхөн цөөн тооны хүмүүс эдгээр чанарыг сэтгэлгээний математикийн хууль гэж ойлгодог боловч, харин тэдгээрийг бүр бага хүүхдүүд ч чөлөөтэй ашигладаг. Үнэндээ „тэр хурдан гүйдэг ба өндөр харайдаг" гэж хэлэх нь „тэр өндөр харайдаг ба хурдан гүйдэг" гэж хэлсэнтэй яг адил гэдэгт хэн ч эргэлзэхгүй нь мэдээж, өөрөөр хэлбэл *ав* ба *ва* хэллэгүүд нь нэгэн адил утгатай, өөр хоорондоо „тэнцүү" гэдгийг (үүнийг зарим нь ухамсарлалгүй ч гэсэн) бүгд мэднэ. Өзөрмөц „алгебрын дүрмийн" хэлбэртэйгээр логикийн хуулиудад математик тайлбарлал хийсэн Дж Булийн шинжилгээ орчин үед олны сонирхлыг яагаад их татах болсны учрыг тайлбарлая. Сүүлийн жилүүдэд үйлдвэрлэлийг удирдах, тээврийн хөдөлгөөний схемийг зохиох, математикийн бодлого бодох, нэг хэлнээс нөгөө хэлэнд орчуулах, эдийн засгийг төлөвлөх зэрэг урьд нь зөвхөн ухамсарт хүний хийж байсан үйлдлүүдийг электрон тооны машинаар гүйцэтгүүлэх болсныг тэр ч байтугай „электрон машинтай шатар тоглох болжээ. Тэгвэл машиныг энэ бүхэнд „сургахын"тулд хүний бүтээсэн энэ «ухаант» машинууд заавал дагаж мөрддөг «тоглоомын тэр дүрмүүдийг „сэтгэлгээний тэр хуулиудыг" тов тодорхой томьёолох шаардлага зүй ёсоор гарна.

Хүн өөрөө логикийн дүрмүүдийг зөнгөөрөө мөрддөг бол машины хувьд энэ дүрмүүдийг математикийн машин „ойлгож“ чадах ганц „хэл“ болох математикийн хэлэч дээр л тов тодорхой томьёолох хэрэгтэй.[1]

Уг „сэтгэлгээний хуулиуддаа“ эргэж орьё. Үгүйсгэл гэгдэх логик үйлдэлтэй холбогдсон дүрмүүд нь нэлээд сонирхолтой бөгөөд, тэдний ихэнх нь логикт тусгай нэртэй байдаг Жишээ нь:

$$a + \bar{a} = i$$

Дүрэм нь *гуравдахыг үгүйсгэх хууль* нэртэй. Энэ нь эсвэл a хэллэг хүчинтэй, эсвэл $\bar{a}$ хэллэг хүчинтэй харин гуравдах нь байж болохгүй, иймд $a + \bar{a}$ хэллэг өөрөөр хэлбэл „a буюу a биш“ нь ямагт үнэн хэллэг байна. Жишээ нь „Ленинград хотын 12-р сургуулийн 7 а ангийн тэр өндөр сурагчийн“ тухай бид юу ч мэдэхгүй мөртөө энэ сурагч „эсвэл онц сурлагатан, эсвэл онц сурлагатан биш“ юмуу тэр „эсвэл шатар тоглож чадна, эсвэл шатар тоглож чадахгүй“ гэж итгэлтэйгээр батлан хэлж чадна.

$$a\bar{a} = 0$$

дүрэм нь *харшлалын* (зөрчлийн) *хууль* нэртэй. Энэ хууль a, $\bar{a}$ хоёр хэллэг нэгэн зэрэг хэзээ ч хүчинтэй байж чадахгүйг батална. Өөрөөр хэлбэл энэ хоёр хэллэгийн үржвэр ямагт худал гэдгийг батална. Жишээ нь ямар нэг сурагч онц сурлагатан мөн бол түүний хувьд „тэр онц сурлагатан биш“ гэсэн хэллэг мэдээж худал байна. *Мөн n тоо бүхэл тэгш бол түүний хувьд* „тэр сондгой тоо“ гэсэн хэллэг худал байна.

$\bar{\bar{a}} = a$ дүрмийг *давхар үгүйсгэлийн* хууль гэдэг. Энэ хууль нь ямар нэг нотолгооны давхар үгүйсгэл нь анхны нотолгоотой адил гэдгийг батална. Тэгш too“ гэсэн бүхэл тоонд холбогдох хэллэгийн үгүйсгэл нь „тэгш тоо биш“ гэсэн хэллэг болно, үүний үгүйсгэл „тэгш тоо биш гэдэг нь биш» нь биднийг тэр тоо тэгш болох тухай анхны нотолгоонд хүргэж байна. Мөн үү-

[1] Хэллэгийн элементар алгебрыг энэ номын хэмжээгээр судалснаар, тооны машиныг бүтээх юмуу, бодлогыг электрон машины бодож чаддаг хэлэн дээр томьёолж чаддаг боллоо гэж бодож хараахан болохгүй юм шүү?

ний адил „тэр үүрэгтэй сурдаг“ гэсэн хэллэгийн давхар үгүйсгэл нь „тэр үүрэггүй сурдаггүй“ гэсэн хэллэг ба тэр нь анхны хэллэгтэй адил чанартай юм.

Үгээр томьёолоход нилээд төвөгтэй хэллэгүүдийн хувьд Де Морганы

$$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b} \text{ ба } \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

дүрмүүд нэлээд ач холбогдолтой юм (дасгал I-ийг үзээрэй).

Ер нь $(a + b)c = ac + bc$ ба $ab + c = (a + c)(b + c)$ хаалт нээх эсвэл $a + a = a$, $aa = a$ идемпотент хууль гэх мэт хэллэгийн алгебрийн бусад бүх хуулиуд нь мэдэгдэж буй дүгнэлтүүдээс шинэ оюуны дүгнэлтүүд гаргах „сэтгэлгээний тодорхой хууль“, логик дүрэм болно.

Логик $\Rightarrow$ харьцаанд холбогдсон дүрмүүд онцгой үүрэгтэй. Одоо хүртэл бид энэ харьцааг авч үзээгүй. Олонлог ба хэллэгийн хооронд дээр тогтоосон „хоёр талт холбоо“ нь олонлогийн алгебрийн $\subset$ харьцааг (агуулагдлын харьцаа) хэллэгийн алгебрт хялбархан шилжүүлэх бололцоо олгож байна. *Хэрэв b хэллэгийн үнэний олонлог B нь a хэллэгийн үнэний олонлог A-г агуулж байвал b хэллэг нь a хэллэгээс гарна* (эсвэл b нь a-ийн мөрдлөгө) гэж хэлэх ба

$$a \Rightarrow b$$

гэж бичих болно.

Жишээ нь, танай ангийн онцчуудын олонлог B нь бүх үүрэгтэй сурагчдын олонлогт агуулагдах нь илэрхий, тэгвэл „тэр (танай ангийн сурагч) бүх хичээлдээ үүрэгтэй сурдаг“ гэсэн b хэллэг нь „тэр онц-сурлагатан“ гэсэн a хэллэгийн мөрдлөгөө болно. Мөн 6-д хуваагдах тоонуудын (натурал тоо) $A_6 = \{6, 12, 18, \ldots\}$ олонлог $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$ тэгш тоонуудын олонлогт агуулагдана. Иймд «тэр (тоо) тэгш» хэллэг нь „тэр 6-д хуваагдана“ гэсэн хэллэгийн мөрдлөгөө болно.[1]

[1] $a \Rightarrow b$ бол a хэллэгийг b-ийн хүрэлцээтэй нөхцөл (тэр онц сурлагатан байхын тулд тэр сурагч бүх хичээлдээ үүрэгтэй байхад хүрэлцээтэй), харин b хэллэгийг a-ийн зайлшгүй нөхцөл гэдэг (онц сурлагатан байхын тулд бүх хичээлдээ үүрэгтэй байх нь зайлшгүй).

a, b хоёр хэллэг $a \Rightarrow b$ харьцаагаар холбогдсон гэдгийг тогтоохыг ихэвчлэн *гаргалгаа* гэдэг. Энэ үед a хэллэгийг *нөхцөл*, энэ нөхцөлөөс мөрдөгдөж буй b хэллэгийг *дүгнэлт* гэдэг. Бид шинжлэх ухаан болоод практик амьдрал ахуйдаа гаргалгаа гаргахтай тун олон тааралддаг. Гаргалгаа ихэнхдээ математикийн теоремийн баталгаатай ижил хэлбэрийн шинж тэмдэгтэй байдаг. Жишээлэхэд: теоремын b нөхцөлөөс (жишээ нь „MNP гурвалжны P өнцөг нь тэгш") түүний a дүгнэлтийг («$MP^2 + NP^2 = MN^2$») гаргах шаардлагатай байна (31 дүгээр зураг). Гаргалгаа хийхдээ теорем батлахдаа) $\supset$ [1]харьцааны үндсэн чанаруудыг системтэйгээр (тайлагналгүй) ашигладаг.

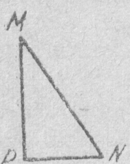
$$a \Rightarrow a;$$
$$a \Rightarrow b \text{ ба } b \Rightarrow a \text{ бол } a = b;$$
$$a \Rightarrow b \text{ ба } b \Rightarrow c \text{ бол } a \Rightarrow c;$$

Ямарваа a хэллэгийн хувьд

$$a \Rightarrow i \text{ ба } o \Rightarrow a$$

Ямарваа a, b хэллэгийн хувьд

$$a \Rightarrow a + b, \; ab \Rightarrow a$$
$$a \Rightarrow b \text{ бол } \overline{b} \Rightarrow \overline{a}$$



31 дүгээр зураг

Жишээ нь: *Хэрэв дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд нь огтлолцлын цэгээрээ хагаслан хуваагддаг бол (a хэллэг) энэ дөрвөн өнцөгт нь* параллелограмм байна (b хэллэг)[2]. Нөгөө талаас параллелограммын эсрэг өнцгүүд нь тэнцүү байдаг (хэллэг c). Тийнхүү $b \Rightarrow a$ ба $a \Rightarrow c$ тул $b \Rightarrow c$ болно, өөрөөр хэлбэл: дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд нь огтлолцлын цэгээр хагаслан хуваагдаж байвал, түүний эсрэг өнцгүүд нь тэнцүү байна.

$a \Rightarrow b$ бол $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ байна гэсэн дүрмийг яаж ашигладгийг авч үзье. Энэ дүрэм нь эсрэгээс нь батлах гэгдэх баталгааны аргын үндэс болдог: Бид $b \Rightarrow a$ харьцааг батлах ёстой байг. Өөрөөр хэлбэл a хэллэгээс b хэллэг мөрдөж гарна гэе. b хүчингүй байвал a ч мөн хүчингүй байна гэдгийг батлах нь хялбархан байх явдал олонтоо тохиолддог, өөрөөр хэлбэл „b биш" ($\overline{b}$ хэллэг) хэллэгээс „a биш" ($\overline{a}$ хэллэг) хэллэг гарна. Жишээ авъя 3-аас их бүхэл тоо n анхны тоо бол (a хэллэг) n нь $6k \pm 1$ (k-бүхэл) хэлбэртэй байна өөрөөр хэлбэл n тоог 6-д хуваахад $+1$ юмуу -1 үлдэгдэлтэй (b хэллэг) «$b \Rightarrow a$ бол $\overline{a} \Rightarrow \overline{b}$» дүрмийг ашиглалгүй үүнийг шууд батлах нь маш хүнд юм. Иймд эсрэгээс нь батлахыг хичээе. $\overline{b}$ хэллэг хүчинтэй гэе, өөрөөр хэлбэл n тоо (3-аас их бүхэл) нь $6k \pm 1$ хэлбэртэй биш гэе. Гэтэл ямарч бүхэл тоо n-ийг 6-д хуваахад үлдэгдэл нь эсвэл 0, эсвэл 1, эсвэл 2, эсвэл 3, эсвэл 4, эсвэл 5 (энэ нь-1 гэсэн үг) байдаг тул $\overline{b}$ таамаглал нь *n тоог 6-д хуваахад эсвэл 0, эсвэл 2, эсвэл 3, эсвэл 4 гэсэн үлдэгдэл* гарна гэсэн үг юм. Эндээс 0 үлдэгдэлтэй тоо өөрөөр хэлбэл 6-д хуваагддаг тоо нь яагаад ч анхны тоо байж болохгүй. Мөн $n > 3$ тоог 6-д хуваахад 2 эсвэл 4 үлдэгдэл гардаг бол тэгш тоо байна, иймд анхны тоо биш, 6-д хуваахад 3 үлдэгдэл гардаг бол 3-т хуваагдана. Иймд бас анхны тоо биш. Ийнхүү $\overline{b}$-аас $\overline{a}$ гарч байна ($\overline{a} \Rightarrow \overline{b}$) Эндээс $b \Rightarrow a$ гэж гарах тул бидний батлах зүйл батлагдлаа[1].

Дасгалууд

1. Хэллэгийн алгебрийн $\overline{a + b} = \overline{a}\,\overline{b}$ ба $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$ гэсэн де Морганы дүрмүүдийг үгээр томьёол.

2. а) гуравдахийг үгүйсгэх
   б) харшлалын
   в) давхар үгүйсгэлийн хуулиудыг тайлбарласан жишээ гарга.

3. 5§-д дурдагдсан хэллэгийн $\supset$ харьцааны чанаруудыг тайлбарласан нэг нэг жишээ гарга.

4. Өөрийн мэдэх эсрэгээс нь батлах баталгааны жишээг сана, түүнийг символ (тэмдэглэл) ашиглан бич.

5. $a = \rangle b$ байг. a, b хэллэгийн нийлбэр $a + b$ ба үржвэр ab хэллэгүүдийг хялбарчил.

---

[1]. Дүрэм: $a \Rightarrow b$ ба $b \Rightarrow a$ бол $a = b$ ба үүнийг b нь a-ийн зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл бол a ба b хэллэгүүд адил чанартай (бидний үзэж байгаагаар бол адил, тэнцүү юм).

[2] Энэ тохиолд бүр $a \Rightarrow b$ ба $b \Rightarrow a$, өөрөөр хэлбэл $a = b$ болно.

[1]Бүр нарийн яривал $\overline{a} \Rightarrow \overline{b}$ гэсэн харьцаанаас $\overline{\overline{(b)}} \Rightarrow \overline{\overline{(a)}}$ эсвэл $\overline{\overline{b}} \Rightarrow \overline{\overline{a}}$ гэтэл $\overline{\overline{a}} = a$ ба $\overline{\overline{b}} = b$ тул $b \Rightarrow a$ болно.

6§. Хэллэг ба залгуурын схем

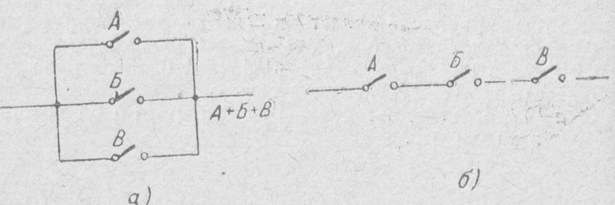
Чамд бүр ч гайхмаар санагдаж магадгүй Булийн алгебрийн нэг жишээг энэ товхимолын эцэст дурдая. Манай алгебрийн элементүүд нь бүх боломжит залгуурын (контактны) схемүүд, өөрөөр хэлбэл залгуурын унтраалгуудаар таслагдсан цахилгаан хэлхээнүүд байна. 32 дугаар зураг дээр дүрслэгдсэн шиг тийм хэлхээний тусгай хэсгүүдийг бид цагаан толгойн том ус



32 дугаар зураг

гүүдээр тэмдэглэе. Тэрхүү тусгай хэсгүүд бидний одоогийн авч үзэх гэж буй өвөрмөц алгебрийн элементүүд болно.

Нэгэнт цахилгаан хэлхээний хэсгийн ганц үүрэг нь цахилгаан гүйдлийг дамжуулах явдал учраас энэ үүргээрээ яг адил байдаг хэлхээний хоёр хэсгийг өөрөөр хэлбэл нэгэн адил унтраалгуудтай бүх унтраалгуудын нэгэн адил байдалд („битүүрсэн“, „битүүрээгүй“) гүйдлийг дамжуулах юмуу дамжуулахгүй нь нэгэн адил байдаг тийм хэлхээнүүдийг ялгахгүй „тэнцүү“ гэж тооцно. Хэлхээний A, $Б$ хоёр хэсгийн *нийлбэр* $A+Б$- гэж тэдгээрийн *параллель* (зэрэгцээ) залгасны үр дүнг хэлнэ. Харин хэлхээний A, $Б$ хоёр хэсгийн *үржвэр* $AБ$ гэж тэдгээрийн угсраа залгасны үр дүнг хэлнэ (33 дугаар б зураг дээр хэлхээний A, $Б$ хэсгүүд нь нэг нэг залгуурыг агуулжээ). Цахилгаан хэлхээний



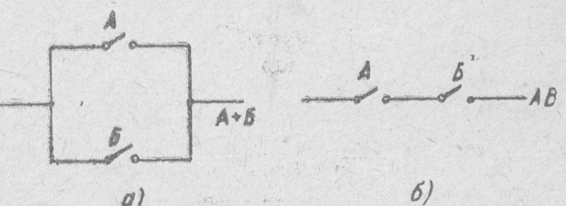
33 дугаар зураг

хэсгүүдийн ийнхүү тодорхойлсон нэмэх, үржих хоёр үйлдэл нь

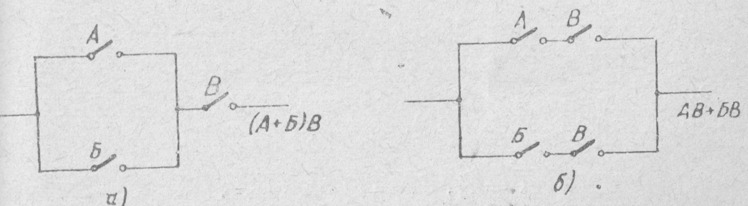
$$A+Б=Б+A,\ AБ=БA$$
байр солих

$$(A+Б)+В=A+(Б+В),\ (AБ)В=A(БВ)$$
бүлэглэх

(34 а, б зураг дээр гурван залгуурын „гурвалсан нийлбэр“ $A+Б+В$ ба тэдгээр „гурвалсан үржвэр“ $AБВ$-г дүрсэлжээ) хууль биелэх нь илэрхий. Тэд бас $A+A=A$ $AA=A$ идемпотент хуулиудыг хангана, учир нь хоёр адилхан залгуурыг зэрэгцээ ба угсраа залгах нь нэг залгуур шиг ижил үр дүнг өгнө. Манай „залгуурын схемийн алгебрт $(A+Б)В=AВ+БВ\ БA+В=(A+В)(Б+В)$ гэсэн хаалт нээх хууль биелдгийг шалгах нь арай төвөгтэй юм. Гэвч 35 ба 36 дугаар зургаас энэ хоёр хууль хүчинтэй болохыг харж болно.

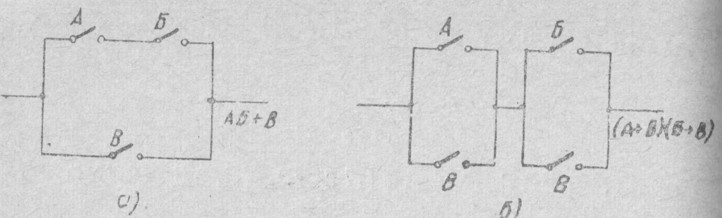


34 дугаар зураг



35 дугаар зураг

35 *а* дээрхи зураг схем нь зураг 35 б дээрхи схемтэй „тэнцүү“ харин 36 *а* дээрхи схем нь 36 б дээрхи схемтэй „тэнцүү“).

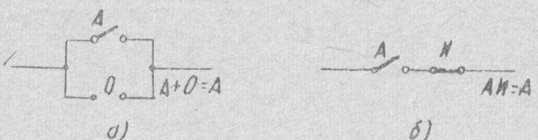


36 дугаар зураг

И үсгээр үргэлж битүү байх (гагнагдсан) залгуурыг (37 дугаар зураг *а*) *о* үсгээр салгагдсан залгуурыг (сүлжээний тасархай; 37 дугаар зураг б) тэмдэглэе. Тэгвэл $А+О=А$ ба $АИ=А$ (38 дугаар зураг) $А+И=И$ ба $АО=О$ (39 дүгээр зураг) биелэх нь илэрхий. Манай Булийн алгебрийн *I* ба *O* „онцгой хоёр элементийн үүргийг *U* ба *O* залгуурууд гүйцэтгэж байна.



37 дугаар зураг



38 дугаар зураг

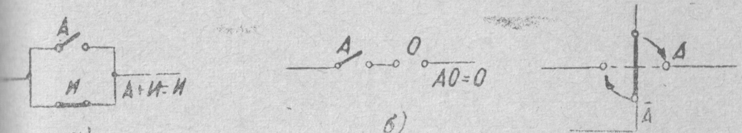
А ба $\overline{А}$ үсгээр, *А залгуур битүүрсэн бол* $\overline{А}$ *залгуур салгагдсан байх* тийм хос залгуурыг тэмдэглэе. Тийм хосыг техникийн хувьд хялбархан хийж болно (40 дүгээр зураг).

$$\overline{\overline{А}}=А,\ \overline{И}=О \text{ ба } \overline{О}=И$$

мөн $А+\overline{А}=И$ ба $А\overline{А}=О$
байх нь илэрхий (41 дүгээр зураг а).

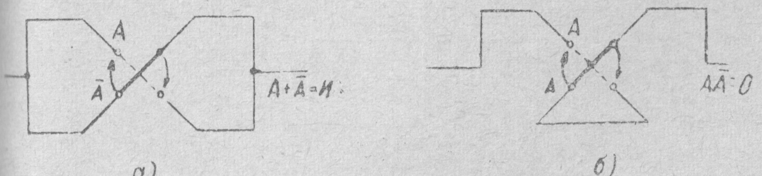
$$\overline{А+Б}=\overline{А}\overline{Б} \text{ ба } \overline{АО}=\overline{А}+\overline{Б}$$

байх де Морганы дүрэм хүчинтэй боловч шалгахад амаргүй 42 а, б зураг дээр $А+Б$ ба $\overline{А+Б}$ хэлхээний



39 дүгээр зураг

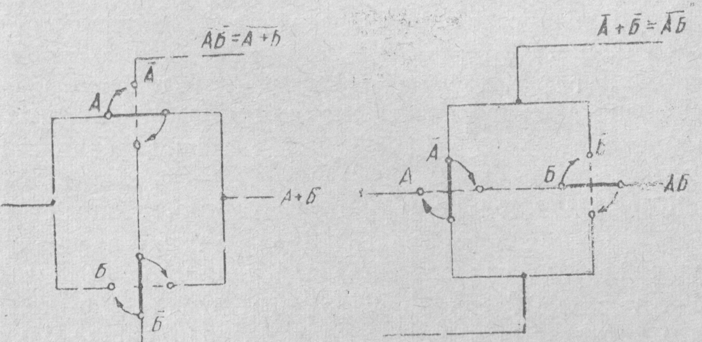
40 дүгээр зураг



41 дүгээр зураг

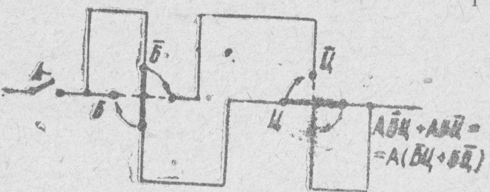
хэсгүүд нь $А+Б$ хэлхээ гүйдэл гүйлгэвэл, $\overline{А+Б}$ нь гүйдэл гүйлгэхгүй, мөн урвуу нь биелнэ гэсэн нөхцөлөөр тодорхойлогдсон).

„Залгуурын схемийн алгебр“ „хэллэгийн алгебртай“ ойр байдаг нь дараахь хоёр утгаар маш үнэтэй юм. Нэгдүгээрт, энэ төсөө нь нийлмэл хэллэгүүдийг цахилгаан хэлхээгээр загварлах боломж олгоно. Жишээ нь $d=abc+abc$ нийлмэл хэллэгийг энд a, b, c-нь „энгийн“ хэллэгүүд, нэмэх үржих, „зураас“ үйлдлүүд нь

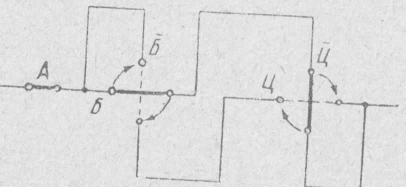


42 дугаар зураг

„буюу“ „ба“ үгүйсгэл гэсэн логик холбоосууд авч үзье. a, b, c хэллэгүүдэд А, Б, Ц залгууруудыг харгалзуулбал, нийлмэл хэллэг d нь 43 дугаар зурагт дүрсэлсэн $D = A\overline{Б}Ц + AБ\overline{Ц}$ схемд харгалзана. Ингэвэл a, b хэллэгүүд үнэн, c хэллэг худал байхад d хэллэг үнэн эсэхийг шалгахын тулд D схемийн A, $Б$ залгууруудыг битүүрүүлж, Ц залгуурыг салгана (44 дүгээр зураг). Ингэхэд схем D гүйдэл гүйлгэвэл энэ нь үнэн хэллэг j-д харгалзана, өөрөөр хэлбэл d хэллэг үнэн байна,



43 дугаар зураг



44 дүгээр зураг

хэрэв D схем гүйдэл гүйлгэхгүй бол (O схемтэй „тэнцүү“), d хэллэг нь O хэллэгтэй адил, өөрөөр хэлбэл худал байна.

Хоёрдугаарт, логик дүрмийн тусламжтайгаар өгөгдсөн нөхцөлүүдийг хангах залгуурын схемүүдийг зохиох боломж олгоно. Үүнийг бид хоёр жишээн дээр тайлбарлая.

Жишээ 1. Хоёр унтраалганы нэг нь хаалганы хажууд нөгөө нь орны толгой дээр байхаар нэг цахилгаан чийдэнтэй унтлагын өрөөний цахилгаан хэлхээний төсөл зохиоё. Тэгэхдээ унтраалга бүрийн эргэлт нь нөгөө унтраалгын байдлаас үл хамааран, хэлхээ битүү байсан бол түүнийг салгадаг салангад байсан бол түүнийг битүүрүүлдэг байг.

Бодолт. Хоёр унтраалгад харгалзах залгуурууг A, $Б$ үсгээр тэмдэглэе. Тэгвэл манай бодлого нь A, $Б$ залгууруудын ($\overline{A}$ ба $\overline{Б}$ байж ч болно) аль нэгний нь байдлыг өөрчилбөл, бүх хэлхээ Ц-ийн байдал өөрчлөгдөхөөр (хэлхээ гүйдэл гүйлгэж байсан бол салгардана, мөн урвуу нь) тийм хослол (унтлагын өрөөний цахилгаан хэлхээнд тохирох) Ц-г зохиоход оршино. Өөрөөр хэлбэл манай бодлого нь ямар нэг a, $в$ хэллэгээс c хослон зохиохдоо, a, $в$ хэллэгийн аль нэгний нь үнэний утгыг эерэгээр өөрчилбөл c хэллэгийн үнэний утга өөрчлөгдөж байхад оршино. Ийм нөхцөлийг хангах c хэллэг нь a, $в$ хэллэгүүд нэгэн зэрэг үнэн, эсвэл худал байхад, үнэн бусад тохиолдолд (a, $в$ хэллэгийн нэг нь үнэн нөгөө нь худал) худал байх явдал юм. Энэ өгүүлбэрт орсон «буюу» холбоос нь: c хэллэг нь хоёр хэллэгийн нийлбэр байж болох юм гэсэн санаа төрүүлж байна. Тэгэхдээ энэ хоёрын нэг нь a ба $в$ хэллэг зэрэг үнэн байхад үнэн, нөгөө нь $\overline{a}$ ба $\overline{в}$ хэллэгүүд зэрэг үнэн байхад үнэн байх ёстой. Гэтэл энд орсон „ба“ холбоос нь уг нийлбэрийн нэмэгдэхүүн бүр нь $ав$ ба $\overline{a}\,\overline{в}$ хэлбэртэй байна гэсэн дүгнэлтэд хүргэж байна. Тийнхүү

$$c + ab + \overline{a}\overline{b}$$

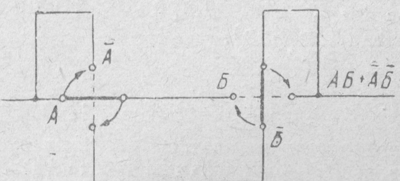
боллоо.

Энэхүү c хэллэг дээр дурдсан нөхцөлийг үнэхээр хангахыг харахад хялбархан.

Одоо хэллэгээс залгуурын схемд шилжвэл бидний сонирхож байгаа цахилгаан хэлхээ Ц нь

$$Ц = АБ + \overline{А}\,\overline{\overline{Б}}$$

томьёогоор илэрхийлэгдэнэ. Тийм схемийг хийх нь техникийн хувьд төвөггүй (45 дугаар зураг).



45 дугаар зураг

Жишээ 2.[1] Цахилгаан шатыг удирдах цахилгаан хэлхээний төсөл зохиох хэрэгтэй болог. Хялбарыг бодож давхрын тоог хоёр гэе. Хэлхээ нь хоёр залгууртай байх бөгөөд түүний удирдлага нь цахилгаан шатны бүхээгт байрласан кноп (буулгах товруу) ба нэгдүгээр давхрын цахилгаан шатны хаалганы дэргэдэх товрууг (дуудлагын товруу) дарснаар гүйцэтгэгдэнэ. Нэмэлт залгуурууд нь нэг ба хоёрдугаар давхрын цахилгаан шатны хаалгатай, бүхээгний дотоод хаалгатай, мөн бүхээгт яваа зорчигчид даралт учруулах цахилгаан шатны шалтай холбогдсон байна. Цахилгаан шатны доош[2] явах хөдөлгөөнийг удирдаж байгаа цахилгаан хэлхээ нь бүхээг хоёрдугаар давхарт байхад юмуу, эсвэл дараахь нөхцөлүүдэд л залгагдана. Үүнд:

1. Цахилгаан шатны хоёр хаалга ба бүхээгний хаалга хаалттай байсан, бүхээгт байгаа зорчигч буулгах товрууг дарсан байх, эсвэл

2. Цахилгаан шатны хоёр хаалга хаалттай харин бүхээгний (хаалга битүү юмуу задгай),зорчигч бүхээгт байхгүй, доороос хүн дуудлагын товрууг дарсан үе болно.

Бодолт. Хэлхээний залгалтыг тохируулж байгаа залгуурын унтраалгуудыг дараахь маягаар тэмдэглэе. В-бүхээг хоёрдугаар давхарт байх үед л битүүрдэг унтраалга;

D_1, D_2-1 ба 2 дугаар давхарт цахилгаан шатны хаалга хаагдахад битүүрдэг унтраалгууд,

D_k -бүхээгний хаалгатай холбогдсон үүний адил унтраалгууд П-бүхээгний шалтай холбогдсон зорчигчдийн жингээс хамаарч битүүрдэг унтраалгууд;

K_c ба $K_в$ нь цахилгаан шатны бүхээгийг буулгах товруу ба 1 дүгээр давхрын хаалганы дэргэдэх дуудлагын товруутай холбогдсон унтраалгууд, Бодлогын нөхцөл ёсоор цахилгаан шатны буултыг удирдах эрж гүй хэлхээ Ц$_c$ нь зөвхөн дараахь тохиолдлуудад л залгагдана. (гүйдэл гүйнэ).

[1]Энэ жишээг И. А. Полетаев, Сигнал Сов. радио. 1958 214 тал номоос авав.

[2]Бид энд зөвхөн цахилгаан шатны доош явах хөдөлгөөнийг удирдаж байгаа хэлхээний байгууламжийг авч үзэж байна, дээш явах үед яг адил хийгдэнэ. (дасгал 6-г хийгээрэй)

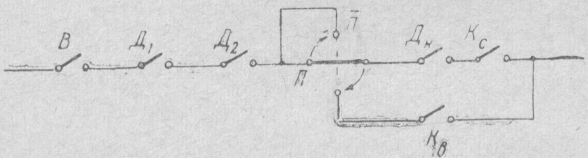
1. залгуур b, D_1, D_2, D_k, $П$, K_c -ууд битүүрсэн эсвэл

2. залгуур B, D_1, D_2, K_b-үүд битүүрсэн ба D_k битүүрсэн эсвэл салгагдсан, П-салгагдсан. Логик үйлдэл „и" нь хэллэгүүдийн залгууруудын) үржвэрт, „эсвэл" нь нийлбэрт харгалздагийг бодолцон

$$Ц_c = BD_1D_2D_kПK_c + BD_1D_2(D_k + \overline{D}_k)K_в\overline{П}$$

болохыг шууд олно.

$D_k + \overline{D}к = И$ ба $И$ залгуурын чанарыг (ямарч A залгуурын хувьд $AИ = A$), мөн үржвэрийн байр солих хууль ба хаалт нээх хуулийг ашиглавал уг илэрхийллийг $Ц_c = BD_1D_2(ПD_к\ K_c + \overline{П}K_b)$ гэж хялбарчилж болно. Тийм хэлхээг хийх нь техникийн хувьд төвөггүй (46 дугаар зураг).



46 дугаар зураг

Дасгал

1. Дараахь нийлмэл хэллэгүүдэд харгалзах залгуурын схемийг дүрсэл

а) $(a + b)(c + d)$;   в) $ab\overline{c} + \overline{aв}c + a\overline{bc}$;

б) $abc + a\overline{b} + \overline{a}$;   г) $a + b)(\overline{a} + \overline{b}) + ab + \overline{ab}$.

2. $(a + c)(b + c)(a + d)(b + d)$ ба $ab + cd$

хэллэгүүдэд харгалзах залгуурын схемийг дүрсэлж, эдгээр схемүүдийн „тэнцлийг„ шалга.

3*. А, Б, В, Г($\overline{А}$, $\overline{Б}$, $\overline{В}$, $\overline{Г}$-залгуурууд ч байж болно) залгууртай бөгөөд

а) А, Б, В, Г залгуур бүгдээрээ залгагдсан эсвэл нэг нь ч залгагдаагүй үед битүүрдэг,

б) А, Б, В, Г залгуурууд бүгд биш зөвхөн зарим нь залгагдсан үед л битүүрдэг тийм Ц хэлхээг байгуул.

4. а) Хороо гурван гишүүнтэй. Хорооны гишүүн бүр санал өгөхдөө товчлуур дарна, ихэнх нь санал өгсөн үед л чийдэн асдаг байхаар санал хураалтын дүнг үзүүлэх цахилгаан хэлхээний төсөл зохио.

б) Дарга ба таван гишүүн бүхий хорооны хувьд дараах нөхцөлд тохирох хэлхээг зохио үүнд: асуудлын тухай ихэнх нь санал өгсөн үед эсвэл санал тэнцүүгээр хуваагдсан боловч асуудлын талаар дарга санал өгсөн үед лампа асна.

5. * а) гурван үл хамаарах түлхүүрээр

б) n үл хамаарах түлхүүрээр асдаг ба унтардаг чийдэнг зохицуулдаг цахилгаан хэлхээний төсөл зохио.

6. § 6-гийн 2 дугаар жишээний нөхцөлд цахилгаан шатны дээш явах хөдөлгөөнийг удирддаг хэлхээний төсөл зохио.

ХАВСРАЛТ

Булийн алгебрийн тодорхойлолт

Булийн алгебр гэж α, β, γ ... элементүүдийн дурын олонлогийн ямарваа хоёр α, β элементэд тэдгээрийн *нийлбэр* гэгдэх $\alpha+\beta$ ба *үржвэр* гэгдэх $\alpha\beta$ элементийг харгалзуулдаг нэмэх ба үржих үйлдэлтэй[1] ямарваа α элементэд шинэ элемент $\bar{\alpha}$-г харгалзуулдаг „зураас“ үйлдэлтэй, мөн хоёр „онцгой“ 0 ба i элементтэй, дараахь дүрмүүд биелэгддэг алгебрийг хэлнэ.

Нэмэх үйлдэлд холбогдох дүрмүүд		Үржих үйлдэлд холбогдох дүрмүүд
1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$	байр солих хуулиуд	1а) $\alpha\beta=\beta\alpha$
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	бүлэглэх хуулиуд	2а) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha+\alpha=\alpha$	идемпотент хуулиуд	3а) $\alpha\alpha=\alpha$

Нэмэх ба үржих үйлдлийг холбосон хуулиуд

4. $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ 4 а) $\alpha\beta+\gamma=(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$

Хаалт нээх хуулиуд

0 ба i элементэд холбогдох дүрмүүд

5. $\alpha+0=\alpha$ 5 а) $\alpha i=\alpha$
6. $\alpha+i=i$ 6 а) $\alpha 0=0$

„Зураас“ үйлдэлд холбогдох дүрмүүд

7. $\bar{\bar{\alpha}}=\alpha$ 8) $\bar{0}=i$ 8 а) $\bar{i}=0$

---

[1] Математикч эрдэмтэн Булийн алгебр нь дурын хоёр α, β элементэд шинэ $\alpha+\beta$, ба $\alpha\beta$-г элементийг харгалзуулдаг хоёр *бинар* үйлдэлтэй (нэмэх ба үржих), мөн дурын α элементэд шинэ $\bar{\alpha}$ элемент харгалзуулдаг нэг *унар* үйлдэлтэй („зураас“) юм гэж ярьдаг.

„Зураас“ үйлдлийг нэмэх ба үржих үйлдэлтэй холбосон дүрмүүл

9. $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ 9 а) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

[Де Морганы дүрмүүд

Булийн алгебрийн тодорхойлолтод $\supset$ харьцааг шаардахгүй байж болно. $\alpha\supset\beta$ агуулагдлыг $\alpha+\beta=\alpha$ буюу $\alpha\beta=\beta$ нөхцөлийн алинаар нь ч тодорхойлж болох бөгөөд, эндээс $\supset$ харьцааны бүх чанарыг гаргаж болно.

$$\alpha=>\alpha;\ \alpha=>\beta \text{ ба } \beta=>\alpha \text{ бол } \alpha=\beta;\ \alpha=\rangle\beta \text{ ба } \beta=>\gamma \text{ бол } \alpha=>\gamma;$$
$$\alpha=>i \text{ ба } 0=>\alpha;\ \alpha=>\alpha+\beta \text{ ба } \alpha\beta=>\alpha\ \beta=>\alpha \text{ бол } \overline{\alpha}=>\overline{\beta}$$

(эдгээрийг гарга!)

Бүр цаашилбал Булийн алгебрийн тодорхойлолтод нэмэх буюу үржих үйлдлийн аль нэгийг шаардахгүй байж болно. Харин зөвхөн энэ хоёр үйлдлийн нэгийг ба „зураас“ үйлдлийг шаардаж болно. Тухайлбал „нэмэх ба „зураас“ хоёр үйлдэл байна гэвэл де Морганы дүрмийн тусламжтайгаар үржих үйлдлийг $\alpha\beta=\overline{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}$ гэж тодорхойлж болно. Гэтэл зөвхөн нэмэх ба үржих үйлдлийн байх нь Булийн алгебрийг тодорхойлж чадахгүй.

Булийн алгебрийн дээр дурдсан бидний тодорхойлолт нь дэндүү „хэмнэлтгүй“ юм. Учир нь дурдсан чанаруудын нэлээд нь бусдаас мөрдөх билээ.

НОМ ЗОХИОЛ

[1]. Дж.Т. Кальбертсон, Математика и логика цифровых устройств, „Просвещение“, 1965.

Дунд сургуулийн программаас хальсан мөртлөө, уншигчдаас ямарч урьдчилсан мэдлэг шаардахгүй боловч математикийн ном унших дадал, тэсвэр хатуужлыг шаардах энэ номонд уг номын агуулгыг бүрдүүлэгч бүх асуудлууд нэлээд өргөн хүрээтэй хөндөгджээ. Бие дааж бодох нэлээд олон бодлоготой.

[2]. Э. Беркли, Символическая логика и разумные машины, ИЛ 1961

Энэ ном олон талаар урьдахтай төстэй гэвч математикийн машинтай холбогдсон асуудлыг өргөн хамруулах зорилгын үүднээс Булийн алгебрт бага бичигдсэн.

[3]. Дж Кемени, Дж. Снелл. Дж Томпсон, Введение в конечную математику.

Математикийн биш мэргэжлийн нэгдүгээр курсийн оюутнуудад зориулсан дэлгэрэнгүй сурах бичиг, манай товхимолд хөндөгдсөн асуудлуудыг нэлээд өргөн хүрээтэй шинжлэх асуудлаас эхэлнэ. Олон тооны бодлоготой.

[4]. Р. Курант и Г. Роббинс Что такое математика, „Просвещение“ 1967

Юуны урьд дунд сургуулийн ахлах ангийн сурагчдад зориулсан энэ номонд Булийн алгебрийн талаар бичигдсэн.

[5]. А. Кофман Р. Фор, Займемся исследованием операций, „Мир“ 1966

Бага бэлтгэлтэй уншигчдад зориулсан энэ сонирхолтой номын нэг бүлэг нь Булийн алгебрт зориулагджээ.

[6]. Р. Столл, Множества, логика и аксиоматические теории „Просвещение“ 1967

Урьдахь номуудаас нэлээд хүнд, харин туршлагатай уншигчид их сонирхолтой.